ЭНЦИКЛОПЕДИЯ
раннего детского
развития



Числовая грамотность

Обновление июня 2015 г.

Редактор темы:
Джеф Бисанз, PhD, Университет Альберты, Канада

Оглавление

Обобщение 5

Числовые знания в раннем детстве 9
КЭТРИН СОФИАН, PHD, ИЮНЯ 2009 R.

Ранние предикторы успехов и трудностей при изучении математики 16
НЭНСИ С. ДЖОРДАН, PHD, ИЮНЯ 2010 R.

Числовая грамотность в раннем возрасте: переход от младенчества к раннему детству 23
КЕЛЛИ С. МИКС, PHD, ИЮНЯ 2010 R.

Траектории изучения математики в раннем возрасте. Пути приобретения навыков и обучения 30
ДУГЛАС Х. КЛЕМЕНТС, PHD, ДЖУЛИ САРАМА, PHD, ИЮЛЯ 2010 R.

Развитие числовой грамотности детей в дошкольных учреждениях 39
АРТУР ДЖ. БАРУДИ, PHD, ИЮЛЯ 2010 R.

Обучение дошкольников математике 49
ДЖОДИ Л. ШЕРМАН-ЛЕВОС, PHD, ИЮЛЯ 2010 R.

Тема разработана при финансовой поддержке:



Обобщение

Насколько это важно?

Числовая грамотность часто определяется как понимание того, что числа обозначают определенные величины. Это понимание отражается в наличии ряда навыков и знаний (таких, как счет, различение неравных групп, операций сложения и вычитания), поэтому термин «числовая грамотность» часто используется для обозначения целого ряда понятий и навыков, связанных с числами. Указанные способности часто проявляются в какой-либо форме у детей задолго до поступления в школу. Уже более века исследователи обсуждают идею обучения математике в раннем детстве (ОМРД), при этом современные дискуссии ведутся относительно целей раннего развития числовой грамотности у детей и способах достижения этих целей. Раннее обучение математике может и должно быть органично включено в ежедневную деятельность детей в виде знакомства с упорядоченностями, понятиями о количестве и пространстве. Предоставляя детям широкие возможности, соответствующие уровню их развития, применять свои математические навыки на практике, мы можем укрепить связь между способностями ребенка к элементарной математике и овладением математическими знаниями в школе. К сожалению, не все дети располагают одинаковыми возможностями для тренировки этих навыков, поэтому концепция ОМРД столь важна. Исследование числовой грамотности и первичных математических навыков крайне важно для формирования программы и целей обучения детей раннего возраста математике.

Трудности при изучении математики – это достаточно распространенное явление среди детей школьного возраста. Приблизительно у 1 из 10 школьников диагностируют нарушение способности к освоению математики в течение всего периода обучения. Одна из наиболее сложных форм – возрастная дискалькулия, проявляющаяся в неспособности считать, подсчитывать количества объектов и различать числа.

Что нам известно?

Базовые математические знания появляются уже в младенчестве. В шестимесячном возрасте дети уже способны воспринимать разницу между небольшими группами,

содержащими разное количество предметов (например, группы, состоящие из двух и трех предметов соответственно). Они также способны различать группы с бóльшим количеством предметов при условии, что соотношение двух групп имеет значительную количественную разницу (например, группы из 16 и 32 предметов имеют достаточную разницу, а группы из 8 и 12 объектов – нет). Со временем эти довербальные представления совершенствуются и формируют необходимую, но недостаточную, основу для последующего обучения математике.

Один из этапов развития количественного мышления – это беглость в элементарных вычислениях (fact fluency). Беглость в элементарных вычислениях – это такое знание, которое необходимо для гибкого, точного и своевременного вычисления суммы или разности. В возрасте, когда ребенок начинает ходить, закладываются предпосылки для беглости элементарных вычислений. Зачастую данный процесс начинается с появления интуитивного счета (например, понимание того, что значит один, два, три), что ведет к развитию способности распознавать, например, то, что любой набор из трех элементов больше, чем любой набор из двух элементов.

По мере того, как дети становятся взрослее, у них развиваются более совершенные числовые навыки. По достижении возраста трех лет, дети уже успешно справляются с невербальными предметными заданиями на сложение и вычитание и на различение двух групп по количеству объектов. Несмотря на то, что дети дошкольного возраста могут соотносить группы из 2, 3 и 4 элементов, имеющих одинаковый размер или форму, ситуации, при которых предметы сильно отличаются друг от друга, вызывают у них затруднения (например, количественное соотнесение двух фигурок животных с двумя черными точками). Отвлекаясь на внешние особенности предметов, дети дошкольного возраста также могут испытывать трудности при определении их количества (например, суждения о том, что в одной группе предметов больше, чем в другой на основании того, что в одной из групп предметы выставлены в более длинный ряд). В настоящее время ведутся исследования, направленные на изучение связи знаний о количестве у детей в раннем возрасте с числовыми навыками детей дошкольного возраста и последующей успеваемостью по математике в школе.

Хотя большинство детей способны естественным образом осваивать математические понятия, окружающая среда и культурный опыт также играют важную роль в

совершенствовании знаний о числах. Например, овладение родным языком позволяет детям решать текстовые задачи и развивать чувство числа (понимание количества, определение общего количества элементов в группе). У детей раннего возраста, лишенных опыта действий с числами, наблюдается отставание от сверстников. Например, у детей из малообеспеченных семей, как правило, хуже развиты навыки владения числами в раннем возрасте, и эти пробелы в знаниях ведут к сложностям в овладении математикой в школе. Успешность решения задач с числами и виды используемых детьми когнитивных стратегий при этом могут значительно варьироваться. Даже у одного и того же ребенка ответы на задачу в разных попытках могут сильно различаться.

Развитие компетенций числовой грамотности в раннем возрасте очень важно, поскольку это напрямую связано с готовностью ребенка изучать математику в момент его поступления в школу и при дальнейшем обучении. Дети дошкольного возраста, умеющие считать, называть числа и различать объекты по количественному признаку, хорошо справляются с задачами с числами в детском саду. Более того, хорошие способности детей оперировать числами более определенно указывают на дальнейшие успехи в учебе, чем навыки чтения, концентрации на поставленной задаче или социо-эмоциональные навыки.

Что можно сделать?

Учитывая естественную предрасположенность детей к изучению чисел, их следует поощрять в свободном исследовании и использовании своих способностей на практике в разнообразных неструктурированных видах деятельности. Этот познавательный опыт должен доставлять удовольствие и соответствовать уровню развития ребенка, для того, чтобы он мог участвовать в какой-то деятельности и не терять к ней интереса. Настольные игры и другие виды деятельности, предполагающие экспериментирование с числами, могут помочь детям развить свои числовые и количественные навыки. Этому же может способствовать и использование таких игровых материалов, как кубики, головоломки и различные фигуры.

Родители могут поощрять развитие числовых знаний детей, предлагая им задания на осмысленное использование чисел и комментируя детские ответы при этом (например, можно задать наводящий вопрос «Сколько у тебя ног?» и использовать ответ ребенка, чтобы объяснить ему, почему он носит два ботиночка, а не один). Родителям и учителям также следует организовывать спонтанные образовательные ситуации, стимулирующие

детей к размышлению и разговорам о числах. Знакомить детей с числами можно в ходе различных занятий: во время игры (использование игральных костей), при выполнении творческих заданий (рисование не одной, а нескольких звезд) и прослушивании музыки (соблюдение музыкального размера и темпа в два-три такта).

Важно понимать, что эффективное обучение детей возможно только при условии, что наставники учитывают детское понимание и интерпретацию математических заданий, которые отличаются от видения взрослых. Учителям следует помнить, что способность к числовой грамотности проходит через определенные этапы развития, и поэтому задания с числами должны быть адекватного уровня сложности. С целью оптимизации воздействия, направленного на развитие способности к числовой грамотности, в детских садах следует проводить тестирование способности детей к распознаванию количества предметов в небольших группах (2 и 3 предмета) и способности понимать количественные различия между группами из двух-трех и более (4-5) предметов.

Раннее обучение детей математики имеет большое значение для их подготовки к школе. Успешная программа обучения математике в раннем детстве (ОМРД) включает в себя создание мотивирующей к обучению среды: например, использование предметов и игрушек, стимулирующих математическое мышление (кубики и головоломки); организация игровых моментов, во время которых дети получают возможность развивать и расширять свои математические способности самостоятельно; включение обучающих моментов, в ходе которых педагог расспрашивает детей о том, какие математические открытия они сделали.

Числовые знания в раннем детстве

Кэтрин Софиан, PhD

Гавайский университет, США

июня 2009 г.

Введение

В последние годы резко выросло количество исследований, посвященных знаниям о числах у маленьких детей. В фокусе данных исследований находится большое разнообразие способностей и представлений, начиная от способности младенцев различать группы, содержащие разное количество предметов[1,2], до понимания дошкольниками числительных (слов, обозначающих цифры)[3,4] и счёта[5,6,7], а также обратных отношений между сложением и вычитанием[8,9].

Предмет

Исследование знаний маленьких детей о числах закладывает основу для определения стандартов дошкольного образования[10] и для составления рабочей программы по математике для дошкольников[11,12,13]. Кроме того, математические знания, приобретенные в дошкольном возрасте, влияют на дальнейшую успеваемость в школе и выбор профессии в будущем[14]. Анализ предикторов школьной успеваемости, проведенный на данных шести лонгитюдных исследований, показал, что математические навыки, демонстрируемые детьми при поступлении в школу, в большей степени позволяют прогнозировать последующую школьную успеваемость, чем это делают навыки чтения, способность к концентрации внимания или социо-эмоциональные навыки[15].

Проблематика

В своей основе числовая грамотность связана с пониманием того, что числа служат обозначениями различных величин. Соответственно, изучение того, как развивается числовая грамотность в раннем детстве, ведет к пониманию того, как дети приходят к пониманию основных количественных отношений, общих для чисел и количеств иного типа, а также таких свойств чисел, которые отличают их от количеств иного типа.

Научный контекст

В ставшем классическим исследовании Ж. Пиаже, посвященном логико-математическому развитию, изучалось то, как дети понимают общие свойства количеств, такие как сериация и сохранение отношений эквивалентности при определенного рода трансформациях[16]. Однако Ж. Пиаже считал, что такого рода знание появляется с развитием у детей конкретно-операционального мышления в возрасте 5-7 лет. Последующие исследования[17] показали, что дети младшего возраста владеют числовыми знаниями в бóльшей степени, чем Пиаже допускал; а современные исследования свидетельствуют о наличии у малышей широкого диапазона способностей к оперированию числами[18].

Ключевые вопросы

Согласно авторитетному, хотя и спорному мнению, представленному в современной литературе по ранним способностям к оперированию числами, мозг «жестко запрограммирован» на число[19,20].В поддержку этой идеи часто приводят в качестве свидетельства способность младенцев и животных различать число объектов[21]. Однако критики нативистских взглядов на числовые знания (философской доктрины, согласно которой мозг рождается с идеями/знаниями), отмечают, что математическое мышление претерпевает непрерывные изменения в ходе развития, что понятие числа медленно дифференцируется от других количественных измерений[22,23], а числовые знания, появляющиеся в раннем возрасте, контекстуально обусловлены[24]. Более того, накопленные данные свидетельствуют о том, что язык[24] и другие продукты культуры и практики[25,26] вносят огромный вклад в освоение маленькими детьми числовых знаний.

Результаты последних исследований

Числовые знания в младенческом возрасте

Одно из наиболее активно развивающихся направлений современных исследований посвящено способностям младенцев к оперированию числами. Kobayashi, Hiraki и Hasegawa [1] использовали несоответствие визуальной и слуховой информации о количестве объектов в группе для того, чтобы оценить способность шестимесячных детей различать количеств. Они показывали младенцам предметы, которые издавали звук при ударе о поверхность, затем роняли два или три предмета за экраном так, чтобы младенцы слышали звук падения каждого, но не видели сами предметы. После этого они удаляли экран, и взору открывалось верное или неверное количество предметов (3, если было 2 звука удара, и наоборот). Младенцы глядели дольше, когда количество предметов не совпадало с количеством

услышанных звуков, что говорит о том, что они способны отличать два предмета от трех. Другие исследования показывают, что шестимесячные дети способны уловить количественную разницу между бóльшим числом предметов, при условии, что она значительна. Шестимесячные младенцы отличают 4 от 8[27] и даже 16 от 32[28] . Однако если разница сокращается (например, 8 и 12), шестимесячные младенцы ошибаются[29], а дети постарше оказываются успешнее[2]. Таким образом, с возрастом младенцы развивают способность к более точному различению количеств.

Знания детей младшего возраста о числовых отношениях

Поскольку числа представляют собой некую величину, основополагающее знание о числах связано с пониманием того, что числовые величины вступают в отношения равенства и отношения больше/меньше[30]. Исследования младенцев обнаруживают удивительный факт: для дошкольников важным достижением в процессе развития становится их способность сравнивать группы предметов в числовом отношении, особенно, когда это влечет за собой способность не принимать во внимание при этом другие отличающиеся признаки.

Например, K. Mix[31] изучала способность трехлетних детей к количественному сопоставлению наборов из 2, 3 или 4 черных точек. Задание выполнялось с легкостью, когда предметы, которые дети должны были сопоставить с точками, внешне их напоминали (например, черные диски или красные ракушки примерно того же размера, что и точки). Однако успешность выполнения задания падала, когда предметы отличались от точек по форме (например, фигурки львов или разные по внешнему виду объекты).

Muldoon, Lewis и Francis[7] изучали способность четырехлетних детей оценивать числовое соотношение двух рядов кубиков (с 6-9 кубиками в ряду) в условиях, когда длина рядов намеренно дезориентирует, т.е. когда два ряда, разные по длине, содержат одинаковое количество элементов или два одинаковых по длине ряда содержат разное количество элементов. Большинство детей полагались на сравнение длины ряда, а не на подсчет элементов. Однако после проведения трех тренировочных подходов результаты улучшились, особенно у тех детей, которых в процессе тренировки просили объяснить, почему ряды равны или неравны численно (о том, что ряды равны или неравны, им сообщал экспериментатор).

Неисследованные области

В то время как количество экспериментальных данных числовой грамотности детей в раннем возрасте стремительно растет, отсутствие общей теории, которая бы объединила весь спектр результатов, полученных эмпирическим путем, ограничивает наше понимание того, как уже полученные разнообразные данные согласуются друг с другом, и какие вопросы еще остаются без ответа. В литературе, посвященной младенчеству, например, конкурирующие гипотезы легли в основу многочисленных исследований последних лет, однако их результаты не сгладили существующие теоретические противоречия. Выдвигая теоретические положения, ученые должны быть осведомлены о результатах всех остальных исследований, а их теории должны быть сформулированы настолько точно, чтобы допускать эмпирическую проверку.

В дополнение к этому, исследователям необходимо больше информации о процессах, обеспечивающих развитие понимания чисел в раннем возрасте. Мы знаем, что на успеваемость детей младшего возраста влияют многие факторы окружающей среды, начиная от культуры и социального класса[32] и заканчивая моделью взаимоотношений между родителем и ребенком[33,34], а также между учителем и ребенком[35]. В настоящий момент наука располагает незначительными по объему сведениями, в основном из экспериментальных исследований с обучением[7,25,36], о том, как конкретный опыт меняет детское числовое мышление. Особенно полезным были бы те исследования, которые предоставили бы обобщающие данные: (а) о повседневном опыте детей, связанном с числами, и о том, как этот опыт меняется с возрастом детей, и (б) об экспериментальном влиянии такого опыта на мышление ребенка.

Выводы

Имеющиеся исследования того, как происходит развитие знаний о числе в детстве, подтверждают четыре обобщающих вывода, которые имеют большое значение для практики и административных директив. Во-первых, развитие знаний о числах многоаспектно. Числовая грамотность в раннем детстве – это гораздо больше, чем простой счет и знание элементарных основ арифметики. Во-вторых, несмотря на свидетельства того, что уже младенцы обладают способностями к распознаванию чисел, возрастные изменения носят непрерывный характер. При сравнении детей разных возрастов старшие дети почти всегда показывают лучшие результаты. В-третьих, вариативность также повсеместна Все дети по-разному справляются с различными задачами с числами[37], прибегают к различной аргументации при оперировании числами в разнообразных ситуациях[3] и даже дают

различные ответы при выполнении одного и того же задания в разных попытках[5,38]. И, наконец, прогресс детей в освоении числовых знаний весьма восприимчив к внешнему воздействию. На успешность развития числовых знаний детей влияет неучебная деятельность, такая как настольные игры[25], специально организованная, экспериментальная деятельность, направленная на разъяснение детям числовых взаимоотношений[7,36], а также те формы и способы, при помощи которых родители[33,34] и учителя[35] рассказывают детям о числах.

Рекомендации

Важный вклад исследований числовой грамотности детей в раннем возрасте для практики и административных директив заключается в том, их результаты могут помочь скорректировать цели, которые устанавливаются для обучения дошкольников математике. Поскольку развитие числовых знаний в раннем детстве многосторонне, то и цели для образовательных программ должны быть намного шире, чем просто обучение детей навыкам счета и основам арифметики. Числа, как и другие величины, характеризуются отношениями равенства и неравенства. В то же время числа отличаются от других величин тем, что в их основе лежит расчленение общего количества на элементы. Учебные задания, которые стимулируют детей размышлять об отношениях между количествами и о том, какое влияние на эти количества оказывают такие преобразования как деление, группировка или перегруппировка, могут ускорить усвоение детьми данных понятий. Благодаря многообразию и пластичности числового мышления детей младшего возраста, учебные программы на этом этапе обладают большим потенциалом для увеличения знаний детей о числах.

Литература

1. Kobayashi T, Hiraki K, Hasegawa T. Auditory-visual intermodal matching of small numerosities in 6-month-old infants. *Developmental Science* 2005;8(5):409-419.
2. Xu F, Arriaga RI. Number discrimination in 10-month-olds. *British Journal of Developmental Psychology* 2007;25(1):103-108.
3. Mix KS. How Spencer made number: First uses of the number words. *Journal of Experimental Child Psychology* 2009;102(4):427-444.
4. Sarnecka BW, Lee MD. Levels of number knowledge in early childhood. *Journal of Experimental Child Psychology* 2009;103(3):325-337.
5. Chetland E, Fluck M. Children’s performance on the ‘give-x’ task: A microgenetic analysis of ‘counting’ and ‘grabbing’ behaviour. *Infant and Child Development* 2007;16(1):35-51.

6. Le Corre M, Carey S. One, two, three, four, nothing more: an investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition* 2007:105(2):395-438.

7. Muldoon K, Lewis C, Francis B. Using cardinality to compare quantities: The role of social-cognitive conflict in the development of basic arithmetical skills. *Developmental Science* 2007;10(5):694-711.

8. Canobi KH, Bethune NE. Number words in young children's conceptual and procedural knowledge of addition, subtraction and inversion. *Cognition* 2008;108(3):675-686.

9. Sherman J, Bisanz J. Evidence for use of mathematical inversion by three-year-old children. *Journal of Cognition and Development* 2007;8(3):333-344.

10. Clements DH, Sarama J, DiBiase AM, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates; 2004.

11. Clements DH, Sarama J. Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American Educational Research Journal* 2008; 45(2):443-494.

12. Griffin S, Case R. Re-thinking the primary school math curriculum: An approach based on cognitive science. *Issues in Education* 1997;3(1):1–49.

13. Starkey P, Klein A, Wakeley A. Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly* 2004;19(1):99-120.

14. National Mathematics Advisory Panel. *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC.: U. S. Department of Education; 2008.

15. Duncan GJ, Dowsett CJ, Claessens A, Magnuson K, Huston AC, Klebanov P, Pagani LS, Feinstein L, Engel M, Brooks-Gunn J, Sexton H, Duckworth K, Japel C. School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*. 2007;43(6):1428 – 46.

16. Piaget J. *The child's conception of number*. Gattegno C, Hodgson FM, trans. New York, NY: Norton; 1952.

17. Gelman R, Gallistel CR. *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press; 1978.

18. Geary DC. Development of mathematical understanding. In: Damon W, ed. *Handbook of child psychology*. 6th ed. New York, NY: John Wiley & Sons; 2006:777-810. Khun D, Siegler RS Siegler, eds. *Cognition, perception, and language*.Vol. 2.

19. Butterworth B. *The mathematical brain*. New York, NY: Macmillan; 1999.

20. Dehaene S. *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford, UK: Oxford University Press; 1997

21. Feigenson L, Dehaene S, Spelke E. Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences* 2004;8(3):307-314.

22. Sophian C. Beyond competence: The significance of performance for conceptual development. *Cognitive Development* 1997;12(3):281-303.

23. Sophian C. *The origins of mathematical knowledge in childhood*. New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates; 2007.

24. Mix KS, Sandhofer CM, Baroody AJ. Number words and number concepts: The interplay of verbal and nonverbal quantification in early childhood. In: RV Kail, ed. *Advances in child development and behavior*.vol. 33. New York, NY: Academic Press; 2005:305-346.

25. Ramani GB, Siegler RS. Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development* 2008;79(2):375-394.

26. Schliemann AD, Carraher DW. The evolution of mathematical reasoning: Everyday versus idealized understandings. *Developmental Review* 2002;22(2):242-266.

27. Xu F. Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representation. *Cognition* 2003;89(1):B15-B25

28. Xu F, Spelke ES, Goddard S. Number sense in human infants. *Developmental Science* 2005;8(1):88-101.

29. Xu F, Spelke ES. Large-number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition* 2000;74(1):B1-B11.

30. Davydov VV. Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. In: Kilpatrick J, Wirszup I, Begle EG, Wilson JW, eds. *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*. Chicago, Ill: University of Chicago Press; 1975: 55-107. Steffe LP, ed. *Children's capacity for learning mathematics.* Vol. 7.

31. Mix KS. Surface similarity and label knowledge impact early numerical comparisons. *British Journal of Developmental Psychology* 2008;26(1):1-11.

32. Starkey P, Klein A. Sociocultural influences on young children's mathematical knowledge. In: Saracho ON, Spodek B, eds. *Contemporary perspectives on mathematics in early childhood education*. Charlotte, NC: IAP/Information Age Pub.; 2008:253-276.

33. Blevins-Knabe B, Musun-Miller L. Number use at home by children and their parents and its relationship to early mathematical performance. *Early Development and Parenting* 1996;5(1):35-45.

34. Lefevre J, Clarke T, Stringer AP. Influences of language and parental involvement on the development of counting skills: Comparisons of French- and English-speaking Canadian children. *Early Child Development and Care* 2002;172(3):283–300.

35. Klibanoff RS, Levine SC, Huttenlocher J, Vasilyeva M, Hedges LV. Preschool children's mathematical knowledge: The effect of teacher "math talk." *Developmental Psychology* 2006;42(1):59-69.

36. Sophian C, Garyantes D, Chang C. When three is less than two: Early developments in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology* 1997;33(5):731-744.

37. Dowker A. Individual differences in numerical abilities in preschoolers. *Developmental Science* 2008;11(5):650-654.

38. Siegler RS. How does change occur: A microgenetic study of number conservation. *Cognitive Psychology* 1995;28(3):225-273.

Ранние предикторы успехов и трудностей при изучении математики

Нэнси С. Джордан, PhD

Университет Делавэр, США

июня 2010 г.

Введение

Трудности при изучении математики широко распространены. Приблизительно у 10% учащихся диагностируют нарушение обучаемости математике на каком-то этапе их школьного обучения[1,2]. Гораздо больше учащихся испытывают трудности в математике, не имея при этом официального диагноза. Поскольку затруднения в изучении математики очень устойчивы, испытывающие их ученики могут никогда не догнать своих сверстников, не обнаруживающих таких проблем.

Предмет

Основания для успешного освоения математики закладываются у детей до поступления в начальную школу[3, 4]. Выявление ключевых предикторов успехов по математике помогает избежать серьезного отставания учащихся по этому предмету в школе еще на этапе скрининга, вмешательства и отслеживания текущей успеваемости детей.

Проблематика

Низкая успеваемость по математике имеет серьезные последствия в повседневной деятельности, негативно влияет на успехи в учебе и карьерный рост[5]. Знание математики необходимо для изучения естественно-научных дисциплин в колледже (англ. STEM – science, technology, engineering, mathematics), а также профессиональной деятельности в сфере науки, технологии, инженерии или математики[6]. Имеются большие межгрупповые различия в успеваемости по математике, связанные с социально-экономическим статусом обучающихся[7], а также индивидуальные различия в базовых способностях к обучению[8]. Эти различия присутствуют уже в раннем детстве и усиливаются в ходе школьного обучения.

Научный контекст

Лонгитюдные исследования особенностей детей, испытывающих трудности при изучении математики, определили важные области для коррективного воздействия. Большинство детей поступают в школу со сформированным *чувством числа*, что имеет значение для изучения школьной математики. Довербальные компоненты числа (например, точные представления о небольших количествах и приблизительные представления о больших количествах) развиваются в младенчестве[9,10,11]. Хотя существует мнение, что эти элементарные знания лежат в основе общепринятых математических навыков, они не являются достаточными. Для большинства детей, испытывающих трудности в математике, характерно слаборазвитое вторичное символическое чувство числа, связанное с пониманием целых чисел, связей между числами и операций с ними[12] – тех областях, которые являются гибкими и меняются под влиянием опыта[13].

Ключевые вопросы

В сфере общей грамотности надежные и обоснованные приемы раннего скрининга привели к созданию эффективных программ воздействия и поддержки для детей в раннем возрасте и далее[14]. Частные показатели, относящиеся к чтению (например, знание как произносятся буквы), позволяют точнее предсказать успехи в этом виде деятельности, чем более общие компетенции. Подобным образом, в области числовой грамотности ранние компетенции, связанные с математикой, которой дети занимаются в школе, являются наиболее показательными для предсказания успехов и трудностей в математике[15]. Поэтому для целей раннего диагностирования необходимо определить ключевые лонгитюдные предикторы успешности в математике.

Результаты последних исследований

Ранние числовые компетенции важны для установления траекторий освоения математики детьми[16,17]. Источником трудностей и нарушений обучаемости математике является слаборазвитое чувство числа[18,19]. Дети с возрастной дискалькулией, тяжелой формой нарушения обучаемости математике, характеризуются неспособностью к распознаванию и сравнению чисел, счету и перечислению предметов в группе[18].

Лонгитюдные предикторы

Краткосрочные лонгитюдные исследования (с начала до конца года в детском саду) показывают, что такие показатели числовой грамотности как счет, различение количества

и называние чисел являются умеренно-сильными предикторами успеваемости по математике[20,21,22]. Более того, с точки зрения показателей уровня развития числовой грамотности успеваемость детей в яслях помогает предсказать их успеваемость в детском саду[23]. Дети из малообеспеченных семей при поступлении в детский сад отстают от своих сверстников из семей со средним уровнем дохода по уровню развития числовой грамотности, что отражается на соответствующих показателях, и этот разрыв не уменьшается в течение школьного года[12].

Лонгитюдные исследования с множественными срезами, проведенные в период с первого года посещения детского сада до конца 3 класса школы, позволяют предположить, что базовое чувство числа обусловливает дальнейшее освоение сложной математики, включающей различные вычисления, а также решение прикладных задач[15,17,24,25]. Развитость числовой грамотности на уровне детского сада, связанного со счетом, сравнением числовых величин, невербальным счетом и вербальной арифметикой, позволяет предсказать уровень понимания математики, а также успеваемость с 1 по 3 классы. Низкая успеваемость по математике у детей из группы высокого риска, из семей с низким уровнем дохода, обусловлена уровнем развития числовых компетенций в раннем детстве. Числовая компетенция также позволяет предсказать последующие результаты по математике лучше и точнее, чем переменные уровня IQ[26]. Наиболее показательным для предсказания успеваемости по математике в детсадовском возрасте является уровень освоения элементарной арифметики, включающей сложение и вычитание. Поскольку развить числовые компетенции в раннем возрасте возможно у большинства детей[4], посреднический эффект этих компетенций определяет направление для раннего вмешательства.

Основополагающие пути

Существует три основополагающих когнитивных пути– количественный, языковой и пространственный, которые независимо друг от друга способствуют развитию числовых компетенций детей ясельного и детсадовского возраста[27]. Языковые навыки являются уникальными предикторами умения называть числа, в то время как количественные навыки выступают в качестве уникальных предикторов невербального счета; пространственное внимание является точным предиктором обоих типов рано проявляющейся числовой грамотности. Эти исходные пути по-разному влияют на результаты по математике по прошествии двух лет (например, языковой, а не количественный, путь однозначно позволяет предсказать освоение понятий геометрии и

измерения). Путева́я модель может объяснить, почему учащиеся относительно хорошо справляются с задачами в одной области математики, но не в другой[28].

Неисследованные области

Необходимо разработать диагностирующие методики, позволяющие выявлять основополагающие числовые компетенции у детей дошкольного возраста, и валидизировать их для использования в школах, клиниках и образовательных учреждениях. Также должны быть разработаны коррекционные программы для детей, испытывающих или потенциально могущих испытывать трудности при изучении математики, при этом оценка качества этих программ должна осуществляться посредством проведения исследований двойным слепым методом. В частности, исследователи должны изучать, как можно наиболее эффективно достичь высоких результатов в конкретных областях числовой компетенции, возможно ли поддерживать эти результаты на высоком уровне в течение длительного времени и можно ли расширить эти успехи на освоение математики в целом. Кроме того, важно различить более и менее эффективные методы улучшения числовой компетентности.

Выводы

Трудности при изучении математики широко распространены и могут иметь негативные последствия на протяжении всей жизни. Основополагающие числовые компетенции развиваются до 1 класса и являются надежными предикторами успехов и трудностей в математике. Более высокий уровень развития числовой компетенции у детей детсадовского возраста позволяет предсказывать статистически значимые и осмысленные по содержанию результаты в использовании математических знаний и вычислений детьми в конце третьего года обучения в школе. Особенно важны числовые компетенции с символами, связанные с пониманием отношений между целыми числами и операций с ними. Числовые компетенции зависят от языковых способностей (например, знание названий чисел), а также от количественных и пространственных знаний (комбинирование и разделение предметов). Хотя результаты в долгосрочной перспективе оказываются хуже для детей из малообеспеченных семей, по сравнению с результатами детей из семей со средним уровнем дохода, успеваемости по математике способствует раннее развитие числовых компетенций. Дети из малообеспеченных семей поступают в школу с относительно небольшим опытом, связанным с числами[29], что усиливает их и без того невыгодное положение. Посредническое влияние числовой компетенции на успеваемость по

математике позволяет предположить, что необходимо более целенаправленно заниматься развитием этих умений у детей дошкольного возраста. Таким образом, чувство числа в раннем возрасте имеет решающее значение для установления траекторий освоения математики в начальной школе.

Рекомендации для родителей, служб и администрации

В современных школах трудности и нарушения в освоении математики часто не диагностируются до 4 класса. Программы ранней коррекции по математике гораздо менее распространены, чем подобные программы для чтения. Педагоги детских садов должны проверять, не испытывают ли дети трудности со счетом и числами так же, как они диагностируют трудности в области общей грамотности. В яслях и детских садах детям должна быть предоставлена возможность познакомиться с математикой и изучить числа, отношения между числами и числовые операции[4]. Эти *ключевые знания о числах* должны опираться на названия числительных, на принципы счета, связанные с количественностью и взаимно однозначным соответствием, на сравнение количества предметов в наборах, а также на соединение и разделение наборов предметов. Списки числительных и простые настольные игры с использованием чисел могут помочь детям выработать понимание количества[30]. Разработчики учебных программ для детей раннего возраста должны учитывать, что используемые материалы следует ориентировать на развитие этих ключевые основы понимания числа. В школах, где обучается большое число детей из малообеспеченных семей, процент учащихся, испытывающих трудности при изучении математики, гораздо выше. Дети из малообеспеченных семей поступают в детский сад, отставая по своим знаниям от детей из семей со средним уровнем дохода. Программы ранней коррекции могут помочь всем детям создать необходимую основу для их последующих занятий по математике.

Литература

1. Barbaresi MJ, Katusic SK, Colligan RC, Weaver AL, Jacobsen SJ. Math learning disorder: Incidence in a population-based birth cohort, 1976-1982, Rochester, Minn. *Ambulatory Pediatrics* 2005;5(5):281-289.
2. Shalev RS, Manor O, Gross-Tsur V. Developmental dyscalculia: A prospective six-year follow-up. *Developmental Medicine and Child Neurology*2005;47:121-125.
3. Clements DH, Sarama J. Early childhood mathematics learning. In: Lester JFK, ed. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, NY: Information Age Publishing; 2007:461-555.
4. Cross CT, Woods TA, Schweingruber H, National Research Council, Committee on Early Childhood Mathematics, eds. *Mathematics learning in early childhood: Paths toward excellence and equity*. Washington, DC: National Academies Press; 2009.

5. Sadler PM, Tai RH. The two high-school pillars supporting college science. *Science* 2007;317:457-458.
6. National Mathematics Advisory Panel (NMAP). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC: U.S. Department of Education; 2008
7. Lubienski ST. A clash of social class cultures? Students' experiences in a discussion-intensive seventh-grade mathematics classroom.*The Elementary School Journal* 2000;100(4):377-403.
8. Geary DC, Hoard MK, Byrd-Craven J, Nugent L, Numtee C. Cognitive mechanisms underlying achievement deficits in children with mathematical learning disability. *Child Development* 2007;78(4):1343-1359.
9. Berch DB. Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities.*Journal of Learning Disabilities*2005;38(4):333-339.
10. Dehaene S. *The number sense: How the mind creates mathematics*. New York, NY: Oxford University Press; 1997.
11. Feigenson L, Dehaene S, Spelke E. Core systems of number. *TRENDS in Cognitive Sciences* 2004;8(7):307-314.
12. Jordan NC, Levine SC. Socioeconomic variation, number competence, and mathematics learning difficulties in young children. *Developmental Disabilities Research Reviews* 2009;15:60-68.
13. Case R, Griffin S. Child cognitive development: The role of central conceptual structures in the development of scientific and social thought. In: Hauert EA, ed. *Developmental psychology: Cognitive, perceptuo-motor, and neurological perspectives*. North-Holland: Elsevier; 1990: 1993-230.
14. Schatschneider C, Carlson CD, Francis DJ, Foorman BR, Fletcher JM. Relationship of rapid automatized naming and phonological awareness in early reading development: Implications for the double-digit hypothesis. *Journal of Learning Disabilities* 2002;35(3):245-256.
15. Jordan NC, Glutting J, Ramineni C. The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences* 2010;20:82-88.
16. Duncan GJ, Dowsett CJ, Classens A, Magnuson K, Huston AC, Klebanov P, Pagani LS, Feinstein L, Engel M, Brooks-Gunn J, Sexton H, Duckworth K, Japel C. School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*2007;43(6):1428-1446.
17. Jordan NC, Kaplan D, Ramineni C, Locuniak MN. Early Math Matters: Kindergarten Number Competence and Later Mathematics Outcomes. *Developmental Psychology* 2009;3(45):850-867.
18. Landerl K, Bevan A, Butterworth B. Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8- 9-year-old students. *Cognition* 2004;93:99-125.
19. Mazzocco MM, Thompson RE. Kindergarten predictors of math learning disability. *Learning Disabilities Research and Practice* 2005;20(3):142-155.
20. Clarke B, Shinn MR. A preliminary investigation into the identification and development of early mathematics curriculum-based measurement. *School Psychology Review* 2004;33(2):234-248.
21. Lembke E, Foegen A. Identifying early numeracy indicators in for kindergarten and first-grade students. *Learning Disabilities Research and Practice* 2009;24:2-20.
22. Methe SA, Hintze JM, Floyd RG. Validation and decision accuracy of early numeracy skill indicators. *School Psychology Review* 2008;37:359-373.
23. VanDerHeyden AM, Broussard C, Cooley A. Further development of measures of early math performance for preschoolers. *Journal of School Psychology* 2006:44:533-553.
24. Jordan NC, Kaplan D, Locuniak MN, Ramineni C. Predicting first-grade math achievement from developmental number sense trajectories. *Learning Disabilities Research & Practice* 2007;22(1):36-46.

25. Jordan NC, Kaplan D, Olah L, Locuniak MN. Number sense growth in kindergarten: A longitudinal investigation of children at risk for mathematics difficulties. *Child Development* 2006;77:153-175.

26. Locuniak MN, Jordan NC. Using kindergarten number sense to predict calculation fluency in second grade. *Journal of Learning Disabilities* 2008;41(5):451-459.

27. LeFevre J, Fast L, Skwarchuk SL, Smith-Chant BL, Bisanz J, Kamawar D, Penner-Wilger M. Pathways to mathematics: Longitudinal predictors of performance. *Child Development*. In press.

28. Mazzocco MM. Defining and differentiating mathematical learning difficulties and disabilities. In: Berch DB, Mazzocco MMM, eds. *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*. Baltimore, MD: Paul H. Brookes; 2007: 29-48

29. Clements DH, Sarama J. Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American Education Research Journal* 2008; 45(2), 443-494.

30. Ramani GB, Siegler RS. Promoting broad and stable improvements in low-income children's numerical knowledge through playing number board games. *Child Development* 2008;79:375-394.

Числовая грамотность в раннем возрасте: переход от младенчества к раннему детству

Келли С. Микс, PhD

Университет штата Мичиган, США

июня 2010 г.

Введение

Представления о числах возникают у детей еще до начала формального обучения. Дети дошкольного возраста демонстрируют такие вербальные навыки как счет и базовые представления об эквивалентности, порядковости и количественных преобразованиях. Хотя исследователи единодушны во мнении, что эти способности проявляются в раннем детстве, они продолжают дискутировать относительно того, когда и посредством каких механизмов указанные способности возникают. Иными словами, каково происхождение ранней числовой грамотности?

Предмет

Исследования числовой грамотности традиционно сосредоточены на вербальном счете. Однако понимание того, что числовая грамотность может возникнуть в младенчестве или в возрасте, когда ребенок начинает ходить, сместило центр внимания ученых в сторону невербальных способностей. В результате смещения интереса круг поведенческих проявлений, относимых к ранним проявлениям числовой грамотности, расширился, что в итоге имеет прямое отношение к обучению детей младшего возраста и оценке их результатов. Новый фокус исследований вызвал ряд вопросов о происхождении неспособности к математике и пробелах при ее изучении, что связано, например, с принадлежностью к различным социально-экономическим группам.

Проблематика

Современные теории развития различаются в том, какую важность они придают вербальным и невербальным представлениям.

Некоторые исследователи считают, что базовая концептуальная структура для числа является врожденной и принимает форму невербальной репрезентации, схожей с вербальным счетом[1,2,3]. С этой точки зрения главным возрастным достижением является способность соотносить числительные с их невербальными референтами.

Другие исследователи утверждают, что врожденные процессы способствуют развитию понимания чисел, но не представляют собой полноценную концептуальную систему числа[4,5]. Эти теории предполагают совмещение доречевого счета и вторичной формы репрезентации, основанной на отслеживании предметов в зрительном поле. Исследователи характеризуют вербальный счет как понятийный катализатор, допускающий сочетание двух невербальных представлений[5] и тем самым помогающий детям преодолеть врожденные ограничения и достигнуть истинного понимания числа[4].

Существует и третий подход, который включает в себя репрезентации с опорой на предметы, но утверждает, что эти репрезентации развиваются в раннем детстве[6]. Согласно этому подходу, предметные репрезентации числа не точны даже для небольших наборов предметов. Напротив, предполагается, что данные представления позволяют ребенку все более точно определять количество благодаря (1) увеличению объема рабочей памяти в ходе онтогенеза, а также (2) благодаря взаимодействию частичного знания о числительных и способности распознавать небольшие множества в определенных условиях[6,7,8].

Некоторые утверждают, что числовые понятия извлекаются из самой системы счета без опоры на невербальные представления. Исследования показали, что дети не способны понять принципы счета до тех пор, пока они не освоили процедуру счета[9,10]. Также было высказано предположение, что дети не способны связать наименования для небольших количеств предметов с общепринятой системой счета, поскольку им не удается выделить естественную последовательность чисел из других последовательностей[11].

Научный контекст

Поскольку исследования направлены на изучение возникновения вербальной числовой грамотности из недр невербальной понятийной основы, существующие эксперименты включают сочетание вербальных и невербальных методов. В вербальном плане исследователи оценивают различные компоненты счета (например, просят детей посчитать вслух по порядку, сосчитать количество предметов в наборе, или назвать число предметов в

наборе). В невербальном плане исследователи используют задания с опорой на манипуляции с предметами, не требующие устного счета. При работе с младенцами и детьми младшего возраста часто используются методы, регистрирующие время фиксации взгляда ребенка на объекте (например, методика привыкания*), или задания, при выполнении которых ребенок должен дотянуться до предмета с определенного расстояния.

Ключевые вопросы

Основная цель исследований заключалась в том, чтобы описать особенности восприятия количества у младенцев и детей младшего возраста. Исследователи хотят выяснить, что дети знают о числах до того, как они овладевают стандартными навыками. Особый профиль сильных и слабых сторон невербальных навыков выдвигается в качестве обоснования той или иной теории развития. Еще одна важная цель исследований – это максимально подробное описание процесса возникновения вербальной числовой грамотности. В этом случае внимательно изучается потенциальное взаимодействие между вербальными и невербальными проявлениями числовой грамотности.

Результаты последних исследований

Числовая чувствительность младенцев

Исследования с использованием методики привыкания показали, что младенцы способны различать небольшие наборы по количеству предметов. Например, когда детям демонстрировалась серия групп предметов с одинаковым количеством, (например, группы, состоящие из двух предметов), но разных по цвету, форме и расположению, время фиксации взгляда у детей постепенно уменьшалось. Однако когда детям предъявляли группу с другим количеством предметов (например, с тремя), время фиксации взгляда увеличивалось, что свидетельствует о том, что дети замечали изменения количества[12,13]. Аналогичные исследования показали, что младенцы способны различать большие группы предметов, предъявляемые как в зрительном, так и в слуховом режиме[14,15], выполнять простейшие вычисления с предметами[3] и распознавать количественные соотношения объектов при предъявлении их в различных модальностях[16,17].

Измерения невербальных способностей в раннем возрасте

Дети начинают выполнять числовые задачи с опорой на манипулирование предметами гораздо раньше, чем у них появляется аналогичное понимание задач, предъявляемых вербально форме. Например, дети дошкольного возраста решают простые задачи на сложение и вычитание, оперируя при этом предметами (например, 2+2), на несколько лет раньше, чем они способны решать аналогичные задачи вербально6,8,18. Подобным образом, дети способны определять порядок и эквивалентность при выполнении заданий с фиксированным количеством вариантов, гораздо раньше, чем они приобретают способность сравнивать идентичные группы предметов вербально, т.е. посредством счета[6,19,20,21,22,23,24]. Способность решать невербальные задачи появляется у детей в возрасте 2,5 – 3 лет.

Развитие навыков вербального счета

Вербальный счет включает три основных навыка. Во-первых, дети должны усвоить последовательность числительных. Названия первых десяти чисел обычно запоминаются к возрасту 3-х лет[25,26]. Дети учатся производить названия чисел, используя конструкции для обозначения чисел второго и третьего десятка (например, оканчивающиеся на -надцать, -дцать), в возрасте около 6-ти лет. Во-вторых, при освоении счета дети должны научиться соотносить слова и предметы, то есть понять, что при счете каждый предмет в группе обозначается конкретной цифрой только один раз. Дети совершают много ошибок на пути к овладению данной способностью в возрасте от 36 и 42 месяцев[25]. В-третьих, дети должны усвоить, что последнее по счету число обозначает общее количество предметов (например, когда вы считаете «1-2-3», у вас имеется 3 предмета). Интересно, что дети приобретают подобное понимание, еще не овладев устным счетом, то есть они осваивают этот принцип, взаимодействуя с небольшими группами предметов[4,25,26,27,28,29]. Действительно, небольшие группы предметов (в количестве от 1 до 3-х) могут обеспечить необходимый контекст для понимания принципа количественного числительного, так как предметы в этих группах можно и сосчитать, и дать им название без подсчета[4,26,27,28,29,30,31,32,33].

Неисследованные области

Неизменной проблемой в исследованиях является вопрос о преодолении трудностей, с которыми сталкиваются дети дошкольного возраста при выполнении задач с числами, не смотря на очевидное понимание ими чисел еще в младенчестве. Например, если младенцы способны представлять и сравнивать группы, состоящие из большого количества предметов, как утверждают некоторые исследователи[15], то почему дети дошкольного

возраста не могут устанавливать количественную равнозначность больших групп предметов до тех пор, пока не научатся считать[34,35]? Такие противоречия подпитывают дебаты о содержании деятельности младенцев, а формулирование данных проблем остается сложной задачей. Например, исследователи только начали задаваться вопросом о том, связано ли восприятие количества у младенцев с числовой грамотностью у детей дошкольного возраста. Также возникает вопрос: связана ли числовая грамотность дошкольников с последующей успеваемостью в школьном курсе математики[36].

Еще один неразрешенный вопрос состоит в том, каким образом дети различают дискретные и непрерывные величины. Доказано, что младенцы способны воспринимать непрерывные величины. Некоторые исследователи утверждают, что именно использование непрерывных величин объясняет способность младенцев решать задачи с числами[37,38]. Независимо от того, способны ли младенцы оперировать непрерывными величинами, дискретными величинами, или и теми и другими, требуется проведение дополнительных исследований, чтобы определить, что именно побуждает их переключать внимание с одного типа величин на другой. Также это поможет определить, какие возрастные изменения происходят, когда дети узнают, каким образом соотносятся непрерывные и дискретные величины (например, то, что размер не влияет на счет, если только не производится счет единиц измерения).

Наконец, многое еще предстоит узнать о взаимодействии процессов невербальной оценки количества и устного счета. Некоторые исследователи утверждают, что все доречевые способности младенцев являются врожденными, поскольку они развиваются без помощи речи[4]. Однако по утверждению других исследователей даже младенцы, не способные называть числа вслух, могли слышать речь с употреблением чисел, поэтому нельзя однозначно сказать, являются ли способности младенцев невербальными или врожденными [39]. С этим связана проблема, каким образом дети осваивают значения числительных и того, в какой мере этот процесс происходит на невербальной основе. Текущие исследования также направлены на изучении того, опосредствует ли овладение понятием множественного числа описанные взаимодействия[40].

Выводы

Данные о наличии числовых компетенций у младенцев породили интересные вопросы об истоках числовой грамотности и понятийных ресурсах, используемых маленькими детьми для овладения вербальным счетом. Однако требуется проведение дальнейших

исследований, чтобы выяснить роль этой способности в развитии младенцев и то, каким образом она связана с последующим невербальным и речевым развитием.

Литература

1. Dehaene S. *The number sense: How the mind creates mathematics.* Oxford, England: Oxford University Press; 1997.
2. Gallistel CR, Gelman R. Preverbal and verbal counting and computation *Cognition* 1992;44: 43-74.
3. Wynn K. Origins of numerical knowledge. *Mathematical cognition* 1995;1:35-60.
4. Carey S. Whorf versus continuity theorists: Bringing data to bear on the debate. In: Bowerman M, Levinson SC, eds. *Language acquisition and conceptual development.* New York, NY: Cambridge University Press: 2001;185-214.
5. Spelke E. What makes us smart? Core knowledge and natural language. In: Gentner D, Goldin-Meadow S, eds. Language in mind. Cambridge, MA: MIT Press; 2003.
6. Huttenlocher J, Jordan N, Levine SC. A mental model for early arithmetic. *Journal of Experimental Psychology: General* 1994;123:284-296.
7. Mix KS, Sandhofer CM., Baroody A. Number words and number concepts: The interplay of verbal and nonverbal processes in early quantitative development. In: Kail RV, ed. *Advances in Child Development and Behavior.* New York, NY: Academic Press; 2005: 305-345.
8. Rasmussen C, Bisanz J. Representation and working memory in early arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology* 2005; 91:137-157.
9. Briars DJ, Siegler RS. A featural analysis of preschoolers' counting knowledge. *Developmental Psychology* 1984;20:607-618.
10. Frye D, Braisby N, Lowe J, Maroudas C, Nicholls J. Young children's understanding of counting and cardinality. *Child Development* 1989;60:1158-1171.
11. Rips LJ, Asmuth J, Bloomfield A. Giving the boot to the bootstrap: How not to learn natural numbers. *Cognition* 2006;101:B51-B60.
12. Antell S, Keating DP. Perception of numerical invariance in neonates. *Child Development* 1983;54:695-701.
13. Strauss MS, Curtis LE. Infant perception of numerosity. *Child Development 1981;52:*1146-1152.
14. Lipton JS, Spelke ES. Origins of number sense: Large number discrimination in human infants. *Psychological Science* 2003;14: 396-401.
15. Xu F, Spelke ES. Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition* 2000;74: B1-B11.
16. Starkey P, Spelke ES, Gelman R. Numerical abstraction by human infants. Cognition 1990;36:97-127.
17. Jordan KE, Suanda SH, Brannon EM. Intersensory redundancy accelerates preverbal numerical competence. *Cognition* 2008;108: 210-221.
18. Levine SC, Jordan NC, Huttenlocher J. Development of calculation abilities in young children. *Journal of Experimental Child Psychology* 1992;53:72-103.
19. Cantlon J, Fink R, Safford K, Brannon EM. Heterogeneity impairs numerical matching but not numerical ordering in preschool children. *Developmental Science* 2007;10:431-440.
20. Mix KS. Preschoolers' recognition of numerical equivalence: Sequential sets. *Journal of Experimental Child Psychology* 1999;74:309-322.

21. Mix KS. Similarity and numerical equivalence: Appearances count. *Cognitive Development* 1999;14:269-297.
22. Mix KS. The construction of number concepts. *Cognitive Development* 2002;17:1345-1363.
23. Mix KS. Children's equivalence judgments: Crossmapping effects. *Cognitive Developmen*t 2008;23:191-203.
24. Mix KS, Huttenlocher J, Levine SC. Do preschool children recognize auditory-visual numerical correspondences? *Child Development* 1996; 67:1592-1608.
25. Fuson KC. *Children's counting and conceptions of number.* New York, NY: Springer-Verlag; 1988.
26. Bermejo V. Cardinality development and counting. *Developmental Psychology* 1996;32:263-268.
27. Mix KS. How Spencer made number: First uses of the number words. *Journal of Experimental Child Psychology* 2009;102: 427-444.
28. Wynn, K. Children's understanding of counting. *Cognition* 1990;36:155-193.
29. Klahr D, Wallace JG. *Cognitive development: An information processing approach*. Hillsdale, NJ: Erlbaum; 1976.
30. Mix KS, Sandhofer CM, Moore JA. How input helps and hinders acquisition of the cardinal word principle. Paper presented at: The biennial meeting of the Society for Research in Child Development. April 2-4, 2009. Denver, CO.
31. Schaeffer B, Eggleston VH, Scott JL. Number development in young children. *Cognitive Psychology* 1974;6:357-379.
32. Spelke ES, Tsivkin S. Initial knowledge and conceptual change: Space and Number. In: Bowerman M, Levinson SC, eds. *Language acquisition and conceptual development.,* New York, NY: Cambridge University Press; 2001:70-97.
33. Wagner S, Walters JA. A longitudinal analysis of early number concepts: From numbers to number. In: Forman G, ed. *Action and thought.* New York: Academic Press; 1982:137-161.
34. LeCorre M, Carey S. One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. *Cognition* 2007;105: 395-438.
35. Siegel LS. The sequence of development of certain number concepts in preschool children. *Developmental Psychology* 1971;5:357-361.
36. Jordan NC, Kaplan D, Ramineni C, Locuniak MN. Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology* 2009;45: 850-867.
37. Clearfield MW, Mix KS. Number versus contour length in infants' discrimination of small visual sets. *Psychological Science* 1999;10:408-411.
38. Feigenson L, Carey S, Hauser M. The representations underlying infants' choice of more: Object files versus analog magnitudes. *Psychological Science* 2002;13:150-156.
39. Mix KS, Huttenlocher J, Levine SC. Multiple cues for quantification in infancy: Is number one of them? Psychological Bulletin 2002;128: 278-294.
40. Barner D, Libenson A, Cheung P, Takasaki M. Cross-linguistic relations between quantifiers and numerals in language acquisition: Evidence from Japanese. *Journal of Experimental Child Psychology* 2009;103: 421-440.

* Методика зрительного привыкания (visual habituation paradigm), строится следующим образом. Ребенок в течение некоторого времени смотрит на один стимул (который обычно предъявляется на экране). Через небольшой промежуток времени происходит привыкание к стимулу, он все меньше привлекает внимание ребенка, и тот начинает отвлекаться. Затем, когда ребенок в очередной раз отворачивается, ему предъявляют новый стимул. Если ребенок начинает дольше смотреть на новый стимул, значит, он отличает его от предыдущего.

Траектории изучения математики в раннем возрасте. Пути приобретения навыков и обучения

Дуглас Х. Клементс, PhD, Джули Сарама, PhD

Высшая школа образования, Университет в Буффало, США и Государственный университет Нью-Йорка в Буффало, США

июля 2010 г.

Введение

В процессе развития и обучения ребенок естественным образом проходит определенные этапы. Простой пример: сначала ребенок начинает ползать, затем учится ходить, бегать и прыгать с возрастающей скоростью и ловкостью. Аналогичным образом дети обучаются математике, следуя естественным этапам развития; они осваивают математические понятия и навыки по-своему. Если педагоги учитывают данные этапы развития и строят обучающую деятельность на основе этого знания, они способны создать такую математически обогащенную среду обучения, которая соответствует уровню развития детей и эффективно их развивает. Эти пути развития представляют собой основной компонент *траектории научения*.

Ключевые вопросы

Траектории обучения помогают ответить на следующие вопросы:

1. Какие цели мы должны ставить перед собой?
2. С чего начать?
3. Как узнать, куда идти дальше?
4. Как добиться результата?

Результаты последних исследований

В последнее время исследователи пришли к принципиальному согласию относительно сущности траекторий научения[1]. Траектории научения включают в себя три компонента: а)

цель обучения математике; б) путь развития, по которому дети следуют к достижению данной цели; 3) комплекс обучающих видов деятельности, или заданий, подобранных в соответствии с определенным уровнем развития мышления детей и помогающих им продвигаться в развитии далее. Далее рассмотрим каждый из этих компонентов.

Цели: Главные математические понятия

Первым компонентом траектории научения является *цель обучения математике*. Наши цели – это *базовые математические понятия* т.е. совокупности ключевых и целостных математических понятий и навыков, соответствующих уровню детского мышления и способствующих их дальнейшему обучению. Эти базовые понятия были сформулированы в процессе осуществления нескольких крупных проектов, включая проекты Национального совета учителей математики и Национальной экспертной группы по вопросам математики [2,3,4]. Например, одна из базовых идей гласит, что *счет помогает определить количество элементов в множестве*. Другое положение заключается в том, что *геометрические фигуры можно описывать, анализировать, преобразовывать, создавать из комбинаций других фигур, а также разбирать на составные элементы*. Важно понимать, что существует несколько подобных базовых понятий и траекторий научения, порядка 12-ти в зависимости от их классификации.

Этапы развития: пути научения

Второй компонент траектории научения представлен уровнями мышления, сложность каждого из которых выше предыдущего, что позволяет достигнуть поставленных целей в математике. Иными словами, этапы развития представляют собой некий естественный путь, следуя которому, дети совершенствуют свое понимание и навыки в конкретном разделе математики. Развитие математических способностей начинается с самого рождения. Определенные компетенции в отношении числа, чувства пространства и упорядоченностей[5,6], похожие на математические, являются у детей врожденными.

Однако представления маленьких детей и их индивидуальные интерпретации ситуаций значительно отличаются от аналогичных представлений у взрослых. По этой причине компетентные преподаватели дошкольных учреждений избегают суждений о том, что дети «воспринимают» ситуации, проблемы и решения подобно взрослым. Вместо этого хорошие преподаватели стараются понять, о чем думают дети и что они делают, пытаются увидеть

ситуацию глазами детей. Аналогичным образом, когда эти преподаватели взаимодействуют с детьми, они рассматривают обучающие виды и свои собственные действия с позиции ребенка. Именно поэтому обучение дошкольников является ответственным и в то же время благодарным занятием.

В траекториях научения, разработанных нами в рамках проектов Building Blocks* и TRIAD†, используются простые обозначения для каждого уровня мышления. В таблице 1 представлена часть траектории научения счету. В колонке Этапы Развития содержится как обозначение каждого уровня мышления, так и его описание с примером детского мышления и поведения. Важно заметить, что в первой колонке возраст детей указывается приблизительно. Не имея соответствующего опыта, некоторые дети могут на несколько лет отставать в развитии от указанного в таблице среднего возраста. Имея качественное образование, дети могут продвинуться в освоении на несколько лет вперед. Как указано в примере, приведенном в таблице, четырехлетние дети, участвовавшие в нашей программе обучения Building Blocks, во всех траекториях научения, включая счет, обнаруживают уровень мышления, соответствующий требованиям для возрастной группы пятилетних, иногда даже превосходя его. (Чтобы узнать больше о комплексе траекторий научения по всем разделам математики, смотрите статьи Clements & Sarama[7]; Sarama & Clements[6]. Данные работы освещают полный комплекс исследований, на которых основаны все траектории научения).

Обучающие задания: пути обучения

Третья составляющая траектории научения включает в себя комплекс обучающих заданий, соответствующих каждому уровню мышления согласно этапам возрастной прогрессии. Данные задания разработаны для того, чтобы помочь детям освоить понятия и навыки, необходимые для достижения определенного уровня мышления. Это означает, что преподаватели могут использовать эти задания, чтобы помочь детям продвигаться от одного уровня к другому. В третьей колонке таблицы 1 содержатся примеры таких заданий. (Повторим, что полный комплекс траекторий научения в работах Clements & Sarama[6,7] включает в себя не только все возрастные уровни, но также обучающие задания для каждого уровня).

Таблица 1. Примеры траекторий научения счету (все примеры взяты из статей Clements & Sarama[8], Clements & Sarama[7], Sarama & Clements[6]).

Возраст	Этапы развития	Обучающие задания
1 год	**До-счетная стадия** *Вербальное выражение*: вербальное выражение счета отсутствует.	Связывайте числительные с количествами, а также друг с другом в качестве компонентов числового ряда.
	Лепет *Вербальное выражение*: монотонное воспроизведение звуков нараспев или произнесение неразличимых на слух чисел.	Регулярные повторения последовательного счета в различных ситуациях.
2 год	**Счет вслух** *Вербальное выражение*: устный счет с отдельными словами, но не обязательно в правильном порядке.	Регулярно повторяйте числа в правильной последовательности в разных ситуациях. *Упражнение «Счет и гонки»*. Дети считают устно вместе со звуковым компьютерным приложением (счет до 50), добавляя одну машинку на мототрек с каждой единицей счета.
3 год	**Счет вслух (до 10)** Вербальное выражение: устный счет до десяти с частичным согласованием с подсчитываемыми объектами.	*Упражнение «Счет и движение»*. Попросите детей посчитать от 1 до 10 или до требуемого числа, совершая какое-либо движение на каждой единице счета. Например, на счет «один» [коснитесь головы], на счет «два» [коснитесь плеч], на счет «три» [коснитесь головы] и так далее.

Возраст	Этапы развития	Обучающие задания
	Соответствие Наличие парного согласования между числами и объектами подсчета (одно слово на каждый объект), на примере небольшой группы предметов, выложенных в один ряд.	*Упражнение «Счет на кухне»*. Находясь за компьютером, дети нажимают с помощью мыши на предметы один за другим в то время, как числа от одного до десяти воспроизводятся вслух. Например, на каждый счет дети нажимают на разные продукты питания, от которых при этом «откусывается» кусочек.
4 год	**Счет небольших величин** Правильный счет предметов до пяти в нужной последовательности и правильный ответ на вопрос «Сколько?» после последнего посчитанного предмета.	Упражнение «Кубики в коробке». Попросите ребенка посчитать небольшой набор кубиков. Сложите кубики в коробку и закройте ее. Затем спросите ребенка, сколько кубиков вы спрятали. Если ребенок может, попросите его/ее записать число. Затем высыпьте кубики и посчитайте их вместе, чтобы проверить правильность ответа. *Упражнение «Пиццы» 2*. Дети считают до пяти, раскладывая пять ингредиентов начинки пиццы.

Возраст	Этапы развития	Обучающие задания
	Распознавание (небольшие величины) Счет до пяти предметов. Осознание того, что в каждой ситуации конечное число при подсчете может быть разным.	*Упражнение «Подсчет движений».* В ходе перерыва попросите детей подсчитать, сколько раз вы подпрыгните или ударите в ладоши (или выполните какое-либо другое движение). Затем попросите их проделать те же движения столько же раз. Первоначально подсчитайте движения вместе с детьми. *Упражнение «Пиццы» 3.* Дети добавляют заданное число ингредиентов в начинку воображаемой пиццы (от 1 до 5).
5 год	**Счет и распознавание (10+)** Точный счет до десяти и выделение предметов, затем более десяти (до 30). Наличие ясного понимания количества (того, что число отражает общее количество элементов в множестве). Отслеживание подсчитанных и не включенных в счет предметов, в том числе данных в произвольном порядке.	*Упражнение «Подсчет башен» (больше 10).* Предложите детям посчитать до 20 и далее, в то время, как они строят высокие башенки, например, из монет. Дети строят максимально высокие башни, добавляя новые монеты, но не поправляя монеты, уже находящиеся в башне. Цель – оценить и подсчитать, сколько монет находится в самой высокой башне. *Упражнение «Магазин динозавриков» 2.* Дети добавляют столько динозавриков в коробку, сколько нужно, чтобы досчитать до заданного числа.

Таким образом, траектории научения включают описание целей обучения, процессов мышления и научения у детей на разных уровнях, а также тренировочные действия, в которых они могут быть задействованы. У людей часто возникают вопросы по поводу траекторий научения.

Будущие направления

Несмотря на то, что данные траектории научения доказали свою эффективность в рамках учебных программ раннего обучения математике и для профессионального развития преподавателей[9,10], было проведено относительно мало исследований, направленных на сравнение способов их внедрения. Таким образом, их конкретную роль еще предстоит изучить. Для детей младшего возраста несколько траекторий научения опираются на многочисленные исследования, например, таковые имеются для обучения счету и арифметике. Однако в основе других траекторий научения, связанных с упорядочиванием и измерением, лежит гораздо меньше исследований. Более того, существует совсем мало методических пособий, посвященных обучению старшеклассников более сложным разделам математики. Данное направление остается актуальным для подобных исследований.

Выводы

Траектории научения могут применяться для стимулирования профессионального развития учителей, преподающих математику детям на ранних этапах. Например, те немногие преподаватели, которые включались в содержательное обсуждение реформы обучения математике, представляли себе учебный процесс не просто как прохождение образовательной программы, но как помощь учащимся в продвижении по уровням понимания предмета[11]. Кроме того, исследователи предполагают, что профессиональное развитие, сосредоточенное на траекториях научения, увеличивает не только профессиональные знания преподавателей, но также мотивацию и успеваемость учащихся [12,13,14]. Таким образом, траектории научения могут способствовать обучению всех детей соответственно их возрасту и этапу развития.

От автора:

Данная статься основана на работе, частично поддержанной грантом №ESI-9730804, выданным Национальной научным фондом на исследование Д. Клементса и Дж. Сарама «Building Blocks – Foundations for Mathematical Thinking, Pre-Kindergarten to Grade 2: Research-based Materials Development». Также работа была частично поддержана Институтом педагогических наук (педагогический департамент США, под контролем Межведомственной исследовательской организации в сфере образования, объединения

Института педагогических наук, Национального научного фонда и Национального Института здоровья и развития человека) посредством гранта №R305K05157, выданного Д. Клементсу, Дж. Сарама и Дж. Ли на исследование «Scaling Up TRIAD: Teaching Early Mathematics for Understanding with Trajectories and Technologies». Любые мнения, результаты исследований, заключения и рекомендации, представленные в этой статье, являются авторскими и не обязательно выражают точку зрения фондовых агентств. Учебная программа, представленная в данном исследовании, была опубликована авторами, права на результаты которой принадлежат авторам. Независимый рецензент оценил структуру исследования, сбор данных и анализ, пять независимых исследователей одобрили материал исследования и его методику. Авторы, имена которых приведены в алфавитном порядке, внесли равный вклад в проведение исследований.

Литература

1. Clements DH, Sarama J, eds. Hypothetical learning trajectories. *Mathematical Thinking and Learning* 2004;6(2).
2. Clements DH, Conference Working Group. Part one: Major themes and recommendations. In: Clements DH, Sarama J, DiBiase AM, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates; 2004: 1-72.
3. NCTM. *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematic; 2006.
4. United States. National Mathematics Advisory Panel. *Foundations for success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington D.C.: U.S. Department of Education, Office of Planning, Evaluation and Policy Development; 2008.
5. Clements DH, Sarama J. Early childhood mathematics learning. In: Lester FK Jr, ed. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York, NY: Information Age Publishing; 2007a: 461-555.
6. Sarama J, Clements DH. *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York, NY: Routledge; 2009.
7. Clements DH, Sarama J. *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge; 2009.
8. Clements DH, Sarama J. SRA real math building blocks. Teacher's resource guide pre K. Columbus, OH: SRA/McGraw-Hill; 2007b.
9. Clements DH, Sarama J. Experimental evaluation of the effects of a research-based preschool mathematics curriculum. *American Educational Research Journal* 2008;45:443-494.
10. Sarama J, Clements DH, Starkey P, Klein A, Wakeley A. *Scaling up the implementation of a pre-kindergarten mathematics curriculum: Teaching for understanding with trajectories and technologies*. Journal of Research on Educational Effectiveness 2008;1:89-119.
11. Fuson KC, Carroll WM, Drueck JV. Achievement results for second and third graders using the Standards-based curriculum Everyday Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education* 2000;31:277-295.

12. Clarke BA. A shape is not defined by its shape: Developing young children’s geometric understanding. *Journal of Australian Research in Early Childhood Education* 2004;11(2):110-127.

13. Fennema EH, Carpenter TP, Frank ML, Levi L, Jacobs VR, Empson SB. A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education* 1996;27:403-434.

14. Wright RJ, Martland J, Stafford AK, Stanger G. *Teaching number: Advancing children's skills and strategies* . London: Paul Chapman Publications/Sage; 2002.

---

[*] См. вебсайт Building Blocks: http://www.ubbuildingblocks.org (Дата обращения: 23 март 2015 г).

[†] См. вебсайт TRIAD: http://www.ubtriad.org (Дата обращения: 23 март 2015 г.).

Развитие числовой грамотности детей в дошкольных учреждениях

Артур Дж. Баруди, PhD

Педагогический колледж, Университет Иллинойса в Урбана-Шампейн, США

июля 2010 г.

Введение

Уже давно обсуждается вопрос о том, как лучше всего помочь детям научиться выполнять операции сложения и вычитания с элементарные числами (например, 3+4=7 и 9+5=14; 7–3=4 и 14–9=5) (см. Baroody & Dowker[1], особенно главы 2, 3, 6 и 7). Однако ученые согласны в том, что детям необходимо достичь определенной беглости в элементарных вычислениях[2]. Подобная беглость подразумевает эффективное (быстрое и точное) вычисление суммы и разности в примерах, а также правильное и гибкое применение этих знаний. За последние 40 лет стало очевидным, что бытовые (неформальные) математические знания детей являются основой для изучения (формальной) математики в школе[3,4,5]. К примеру, исследования показывают, что развитие у детей чувства числа способствует беглости в элементарных вычислениях (fact fluency)[6,7,8,9]. Целью настоящей статьи является обобщение данных о том, как развитие обыденного чувства числа до первого класса школы обеспечивает основу для ключевого в начальных классах формального навыка беглости в элементарных вычислениях.

Ключевые вопросы

1. Когда родителям и педагогам дошкольных учреждений следует начинать (а) способствовать развитию чувства числа у ребенка и (б) напрямую развивать у детей беглость в элементарных вычислениях?
2. Какие возрастные предпосылки дети должны иметь изначально, чтобы быстро и эффективно достигнуть беглости в элементарных вычислениях?
3. Какую роль в развитии этого базового знания играет язык?
4. Как родители и педагоги дошкольных учреждений могут наилучшим образом стимулировать развитие чувства числа и беглости в элементарных вычислениях?

Результаты последних исследований

Вопрос 1. Помогать детям в развитии чувства числа – основы беглости в элементарных вычислениях – можно и следует начинать уже в дошкольном возрасте. Последние исследования показывают, что дети начинают формировать чувство числа очень рано. В действительности, малыши в возрасте 18 месяцев и почти все дети в возрасте двух лет уже сформировывают начальные задатки, необходимые для беглости в элементарных вычислениях (см. обзор Baroody, Lai & Mix[3]).

Эффективность усилий, направленных на повышение беглости в элементарных вычислениях, зависит от того, готов ли ребенок к обучению в возрастном плане, и от предлагаемого ему темпа обучения. Как показывают последние исследования, значимые индивидуальные различия в чувстве числа появляются уже в 2-3 года и часто увеличиваются с возрастом[3,10], вследствие чего не существует строгих предписаний в том, когда нужно начинать планомерное развитие беглости в вычислениях. Разумеется, для многих детей в силу особенностей их развития это обучение даже самым простым вычислениям (n+0 и n+1) должно начинаться не ранее последнего года детского сада или первого класса школы[11]. Детям, для которых прогнозируется высокая вероятность академической неуспеваемости, задачи с элементарными числами, скорее всего, не имеет смысла предлагать вплоть до первого или второго класса школы[12].

Вопросы 2 и 3. Некоторые исследования показывают, что язык, проявляющийся в виде знания названий нескольких первых числительных, играет ключевую роль в формировании чувства числа (см. подробное обсуждение у Baroody[3]; Mix, Sandhofer & Baroody[13]). Точнее говоря, язык обеспечивает фундамент для двух базовых составляющих чувства числа в раннем возрасте, а именно для понятия *кардинального числа множества* (общее количество элементов в множестве) и для способности к вербальному распознаванию числа, ВРЧ (verbal number recognition; VNR), иногда называемой «вербальной субитизацией» (определение количества «на глаз» – прим. пер.), что отмечено в верхней части **Рисунка 1**. ВРЧ подразумевает точное и быстрое определение количества элементов в небольших множествах и называние их соответствующим числительным. Использование слов «один», «два», «три» в сочетании с демонстрацией релевантных и нерелевантных примеров, может помочь детям 2-3 лет сформировать точное и надежное «интуитивное понимание» чисел *один, два, три* – понимание того, когда что-то одно, чего-то два, чего-то три.

- Видя изображения ●●, ΔΔ и $^{o}{}_{o}$ (релевантные примеры пар) и слыша их обозначение при помощи числительного «два», дети могут понять, что внешний вид элементов

множества не важен (форма и цвет не влияют на количество). Кроме того, в результате у них может появиться обозначение «два» для интуитивной идеи *множественности* (того, что предметов больше, чем один).

- Видя изображения ●, ●●●, Δ, ΔΔΔ, , и  (нерелевантные примеры пар), обозначенные словами «не два» или другим числительным, дети могут определить границы понятия *два*.

Ключевые рекомендации для подобных заданий заключаются в том, что базовое понимание кардинального числа множества не является врожденным и не развивается автоматически в ходе онтогенеза (Ср. Dehaene[15])[14,16]. Родители и педагоги дошкольных учреждений играют важную роль в этом процессе, поскольку они обеспечивают опыт и обратную связь, необходимые для формирования понятия числа. Поэтому им следует использовать бытовые ситуации для обозначения небольших множеств и стимулировать детей делать так же (например, «Сколько у тебя ног?» – «Значит, тебе нужно два ботинка, а не один» или «Ты можешь взять одно печенье, но не два»). Некоторые дети начинают ходить в детский сад, еще не научившись различать все «интуитивные» числа. Такие дети подвергаются серьезному риску оказаться среди неуспевающих учеников в школе и нуждаются в интенсивных корректирующих занятиях. При проведении диагностирования способностей воспитанников детских садов следует проверять, могут ли дети быстро различать наборы из одного, двух и трех предметов и отличать их от несколько более крупных наборов, состоящих из четырех и пяти предметов.

Как показано на **Рисунке 1**, взаимосвязанное развитие кардинальных понятий интуитивных чисел и способности к вербальному распознаванию чисел может обеспечить основу для широкого спектра числовых, счетных и арифметических понятий и навыков. Эти навыки могут обеспечить основу для осмысленного вербального счета. Распознавание «интуитивных» чисел может помочь детям увидеть наглядно, что группа, обозначенная «два», включает больше предметов, чем группа с названием «один», и что группа «три» включает больше предметов, чем группа «два». Это базовое понимание порядковости чисел, в свою очередь, поможет детям понять, что порядок числительных важен при счете (*принцип владения числовым рядом*), и что последовательность числительных («один, два, три…») отражает возрастание количества элементов в множестве. Как только ребенок осваивает последовательность счетных слов, у него развивается способность начинать счет с любого числа и (правильно) называть следующее число последовательности (*навык определения следующего числа*), не начиная отсчет вновь от единицы.

Способность автоматически называть следующее число счетной последовательности может являться основой для осознания того, что прибавление единицы к какому-либо числу создает число большей величины и, далее, для освоения этой операции при перестановке слагаемых в примерах n+1 / 1+n. При прибавлении единицы к числу суммой является следующее число счетной последовательности (например, суммой для 7+1 является следующее по счету число после семи, или восемь). Эта стратегия рассуждения поможет детям вычислять суммы в подобных комбинациях, если они знают последовательность счета, включая даже многозначные числа, как например 28+1, 128+1 или 1000128+1. Со временем эта стратегия рассуждения становится автоматической, т.е. может эффективно применяться без обдумывания (становится компонентом системы воспроизведения/извлечения). Другими словами, она становится основой для беглости в решении комбинаций n+1 / 1+n.

ВРЧ и понимание порядка счета, которое оно включает, может стать основой осмысленного счета предметов[17]. Дети, которые могут различать «один», «два» и «три», легче осваивают счет предметов с помощью взрослых, чем дети, не способные различать эти числа. Они также легче понимают цель счета (один из способов определения общего количества предметов) и причины некоторых действий в процессе счета (например, кто-то повторяет последнее по счету слово, чтобы подчеркнуть, что это общее количество предметов). Осмысленный счет предметов необходим для выработки стратегий счета (с помощью объектов или числительных), чтобы определять суммы и разности. Как только эти стратегии закрепляются, внимание переключается на исследование упорядоченностей и отношений; эти математические закономерности, в свою очередь, служат основой для стратегий рассуждения (то есть, как ребенок решит незнакомый пример, используя известные ему примеры и отношения). Как только эти стратегии рассуждения становятся автоматическими, они могут служить одной из стратегий эффективного извлечения ответов из памяти.

ВРЧ позволяет ребенку видеть сочетание «один+один» как «два», «один+один+один» – как «три» и наоборот (например, «три» как «один+один+один»). Таким образом, ребенок конструирует понимание сочетания и разложения (целое может складываться из нескольких частей или разбиваться на части разными способами). Если ребенок постоянно видит перед собой примеры сочетания и разложения «двух» и «трех», это приведет к развитию беглости в вычислениях элементарных сумм и разностей («один плюс один равно два», «два плюс один равно три» и «два минус один равно один»). Разложение «четырех» и «пяти» на части с обратной связью (например, ребенок называет группу из четырех объектов «два плюс два», а другой человек подтверждает: «Да, два плюс два – четыре»)

может привести к беглости в вычислениях элементарных сумм до пяти и использованию «правила следующего числа» в комбинациях n+1/1+n (как обсуждалось ранее).

Понятие кардинальности, ВРЧ, а также понятия сложения и разложения на составляющие обеспечивают основу для формирования понятий сложения и вычитания. Например, добавляя один предмет к группе из двух предметов, ребенок наглядно видит, что изначальная группа преобразуется в бóльшую по количеству группу и состоит уже из трех предметов. Подобные компетенции в свою очередь служат основой для формирования конкретно-абстрактного понимания следующих арифметических понятий[18]:

- Понятие вычитания до ноля (subtractive negation). Например, дети осознают, что, если от двух имеющихся в наличии кубиков убрать два кубика, то ничего не останется. Это осознание может перерасти в обобщение о том, что если из любого числа вычесть его же, то ничего не останется.
- Понятие неизменяемости количества (additive and subtractive identity). Например, когда дети понимают, что если от двух кубиков отнять ноль, то останется два кубика, они могут выработать обобщение о том, что при вычитании ноля из любого числа это число останется неизменным.

Оба понятия служат основой для развития беглости в элементарных вычислениях примеров по типу n – n = 0 и типу n – 0 = n.

Слабо развитое чувство числа может мешать достижению беглости в элементарных вычислениях и достижению успехов по математике. Например, Mazzocco & Thompson[19] обнаружили, что успешность выполнения дошкольниками четырех типов заданий из второго издания «Теста ранних математических способностей» (Test of Early Mathematics Ability – Second Edition; TEMA-2) позволяет предсказать, кто из школьников будет иметь сложности в освоении математики во втором и третьем классах. К числу этих заданий относятся следующие: осмысленный счет объектов (со знанием того, что последнее по счету число и является количеством объектов), понятие кардинальности, сравнение однозначных чисел (напр., «Что больше – четыре или пять?»), сложение однозначных чисел в уме и чтение соответствующих числительных. Следует отметить, что способность к вербальному распознаванию «интуитивных» чисел является одной из основ для первых трех вышеупомянутых навыков и значительным фактором в овладении четвертым.

Вопрос 4. Чтобы стимулировать формирование чувства числа в целом и беглости в элементарных вычислениях, в частности, необходимо создавать для детей возможности для

исследования упорядоченностей и отношений. Например, ребенок, выучивший осмысленным образом «пары/удвоения» «5+5=10», «6+6=12» и т.д. (например, ребенок понимает, что все подобные суммы являются четными, или делящимися на два), может использовать эти знания, чтобы вычислить неизвестные суммы типа «пара+1»: например, 5+6 (т.е. 5+(5+1) или (5+5)+1) или 7+6.

Для того, чтобы соответствовать этапу развития ребенка, возможности обучения должны быть целенаправленными, осмысленными и проблемно-ориентированными[20].

- Обучение должно быть целенаправленным и интересным для детей. Этого можно достигнуть, внедряя обучающие моменты в структурированную игру (например, играя в игру, где надо бросать кубик, можно помочь детям научиться распознавать числа от одного до шести). Музыка и рисование могут служить в качестве естественных средств, помогающих обратить внимание на упорядоченности, числа и фигуры (например, поддержание ритма из двух или трех хлопков; рисование некоторого числа шариков). Родители и педагоги могут использовать для обучения многочисленные ежедневные ситуации (например, «Сколько у тебя ножек? ... Так, значит сколько носочков тебе нужно достать из ящика?»). Важным источником целенаправленного обучения могут служить вопросы детей.
- Обучение должно быть осмысленным для детей и постепенно надстраиваться над (и связываться с) тем, что они уже знают. Для взрослых, работающих с 2-годовалыми детьми, значимой целью является научить детей распознавать число «два». Не следует слишком торопиться и учить детей последующим числам, например, числу «четыре», поскольку это может снизить их мотивацию (ребенок может стать невнимательным или агрессивным, давать ответы невпопад или иным образом абстрагироваться от деятельности).
- Обучение должно быть, насколько это возможно, проблемно-ориентированным или побуждающим к размышлению. Вместо того чтобы просто давать детям некоторую информацию, родители и педагоги должны дать детям возможность подумать о проблеме или задаче, сделать предположения (продуманные догадки), разработать свою стратегию или вывести свой ответ.

Случаи Элис[21] и Лукаса[22] иллюстрируют некоторые аспекты, описанные выше:

- *Случай Элис.* К двум с половиной годам Элис уже умела уверенно различать один, два или три предмета. Поэтому ее родители захотели расширить диапазон знаний девочки до числа «четыре», что было на тот момент за рамками ее возможностей. Вместо того,

чтобы просто называть число «четыре» при описании групп из четырех предметов, они задавали Элис вопросы о таких группах. Девочка часто отвечала, предварительно разложив незнакомую группу на две знакомых. Затем родители дополняли ее ответ: «Два плюс два равно четырем». Когда в 30-месячном возрасте Элис показали картину четырех щенков, она положила два пальца левой руки на двух щенков и сказала: «Два». Не убирая левую руку, она положила два пальца правой руки на двух других щенков и сказала: «Два». Затем она использовала известное ей от родителей утверждение о том, что «два плюс два равно четырем», чтобы обозначить кардинальное число щенков на картине.

- *Случай Лукаса.* В контексте компьютерной математической игры Лукасу предъявили пример 6+6. Он определил сумму, используя счет. Затем ему предъявили пример 7+7. Он улыбнулся и быстро ответил: «Тринадцать». Когда компьютер объявил правильный ответ – число 14, Лукас выглядел озадаченным. Через пару заданий ему выпал пример 8+8, и Лукас пояснил: «Я собирался ответить 15, потому что 7+7 было 14. Но до этого 6+6 было 12, и я думал, что 7+7 это наверняка 13, но было 14. Поэтому я собираюсь ответить, что 8+8 это 16».

Будущие направления

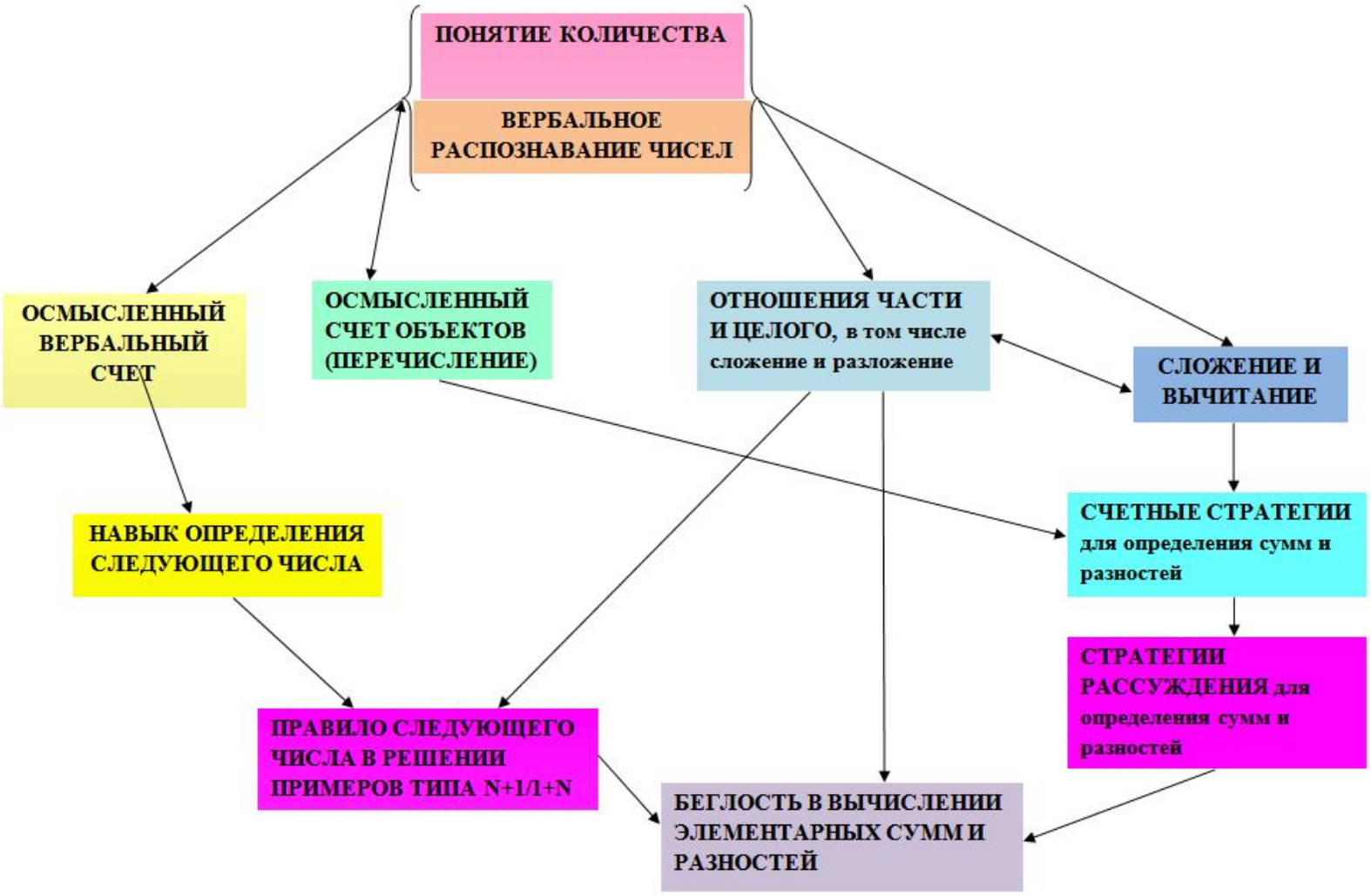
Многое еще предстоит узнать о развитии математических способностей у дошкольников. Влияет ли способность к вербальному распознаванию чисел в возрасте двух лет на готовность к детскому саду и успеваемость по математике в школе? Если это так, может ли вмешательство, основанное на релевантных и нерелевантных примерах, помочь детям из группы риска по успеваемости, догнать своих сверстников? На основе каких еще других сформированных понятий или навыков у двух-трехлетних детей можно предсказывать готовность к детскому саду или успеваемость по математике в школе? Насколько эффективны разрабатываемые в настоящее время программы по раннему математическому развитию?

Выводы

Вопреки мнению многих педагогов дошкольных учреждений, обучение математике детей в возрасте двух лет имеет смысл[23,24,25,26]. Как показано на Рисунке 1, это обучение должно начинаться с формирования у детей понимания «интуитивных» кардинальных чисел, а также навыка распознавания и обозначения групп из одного-трех предметов соответствующим числительным. Как показано на Рисунке 1, эти знания о числах являются

ключевыми для последующего развития числовой грамотности, и детям могут с трудностями в освоении математики часто недостает их[27]. Раннее обучение не означает, что на дошкольников обрушится огромное количество информации, и их заставят тренироваться с карточками и заучивать наизусть арифметические примеры. Для того, чтобы развивать у детей чувство числа и беглость в элементарных вычислениях, нужно помогать детям выявлять отношения и упорядоченности, а также поощрять их изобретать свои собственные стратегии рассуждения.

Рисунок 1. Траектории научения некоторым ключевым числовым, счетным и арифметическим понятиям и навыкам



Описанные исследования проводились при поддержке гранта Национального научного фонда (BCS-0111829), фонда Спенсера (мега-грант 200400033), Национальных

Институтов Здоровья (1 R01 HD051538-01), а также Института Образования и Науки (R305K050082). Мнения, выраженные в настоящей рукописи, отражают исключительно точку зрения автора и не обязательно отражают позицию, политику или одобрение вышеупомянутых учреждений.

Литература

1. Baroody AJ, Dowker A. The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise. In: Schoenfeld A, ed. *Studies in mathematics thinking and learning series*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates; 2003.
2. Kilpatrick J, Swafford J, Findell B, eds. *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press; 2001.
3. Baroody AJ, Lai ML, Mix KS. The development of number and operation sense in early childhood. In: Saracho O, Spodek B, eds. *Handbook of research on the education of young children*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2006: 187-221.
4. Clements D, Sarama J, DiBiase AM, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates; 2004: 149-172.
5. Ginsburg HP, Klein A, Starkey P. The development of children's mathematical knowledge: Connecting research with practice. In: Sigel IE, Renninger KA, eds. *Child psychology in practice*. 5th Ed. New York, NY: Wiley & Sons; 1998; 401–476. *Handbook of child psychology*, vol 4.
6. Baroody AJ. Why children have difficulties mastering the basic number facts and how to help them. *Teaching Children Mathematics* 2006;13:22–31.
7. Baroody AJ, Thompson B, Eiland M. Fostering the fact fluency of grade 1 at-risk children. Paper presented at: The annual meeting of the American Educational Research Association. April, 2008. New York, NY.
8. Gersten R, Chard, D. Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of Special Education* 1999;33(1):18–28.
9. Jordan NC. The need for number sense. *Educational Leadership* 2007;65(2):63–66.
10. Dowker AD. *Individual differences in arithmetic: Implications for psychology, neuroscience and education*. Hove, England: Psychology Press; 2005.
11. Baroody AJ. The development of kindergartners' mental-addition strategies. *Learning and Individual Differences* 1992;4:215-235.
12. Baroody AJ, Eiland M, Thompson B. Fostering at-risk preschoolers' number sense. *Early Education and Development* 2009;20:80-120.
13. Mix KS, Sandhofer CM, Baroody AJ. Number words and number concepts: The interplay of verbal and nonverbal processes in early quantitative development. In: Kail R, ed. *Advances in child development and behavior*, vol 33. New York, NY: Academic Press; 2005: 305-346.
14. Baroody AJ, Li X, Lai ML. Toddlers' spontaneous attention to number. *Mathematics Thinking and Learning* 2008;10:1-31.
15. Dehaene S. *The number sense*. New York, NY: Oxford University Press; 1997.
16. Wynn K. Numerical competence in infants. In; Donlan C, ed. *Development of mathematical skills*. Hove, England: Psychology Press; 1998: 1-25.
17. Benoit L, Lehalle H, Jouen F. Do young children acquire number words through subitizing or counting? *Cognitive Development* 2004;19:291–307.

18. Baroody AJ, Lai ML, Li X, Baroody AE. Preschoolers' understanding of subtraction-related principles. *Mathematics Thinking and Learning* 2009;11:41–60.

19. Mazzocco M, Thompson R. Kindergarten predictors of math learning disability. *Learning Disabilities Research & Practice* 2005;20:142-155.

20. Baroody AJ, Coslick RT. *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 1998.

21. Baroody AJ, Rosu L. Adaptive expertise with basic addition and subtraction combinations: The number sense view. In: Baroody AJ, Torbeyns T. chairs. Developing Adaptive Expertise in Elementary School Arithmetic. Symposium conducted at: The annual meeting of the American Educational Research Association. April, 2006. San Francisco, CA.

22. Baroody AJ. Fostering early number sense. Keynote address at: The Banff International Conference on Behavioural Science. March, 2008. Banff, Alberta.

23. Baroody AJ, Li X. Mathematics instruction that makes sense for 2 to 5 year olds. In: Essa EA, Burnham MM, eds. *Development and education: Research reviews from young children*. New York: The National Association for the Education of Young Children; 2009: 119-135.

24. Bredekamp S, Copple C. Developmentally appropriate practice in early childhood programs. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children; 1997.

25. Copley J, ed. *Mathematics in the early years, birth to five*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; 1999.

26. Copley J, ed. The young child and mathematics. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children; 2000.

27. Landerl K, Bevan A, Butterworth B. Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: A study of 8-9 year old students. *Cognition* 2004;93:99–125.

Данная статья впервые была опубликована в Энциклопедии Развития Языка и Грамотности, подготовленной Университетом Западного Онтарио, который обладает авторскими правами на эту статью.

Обучение дошкольников математике

Джоди Л. Шерман-ЛеВос, PhD

Университет Калифорнии, Беркли, США

июля 2010 г.

Введение

Преподавание математики маленьким детям, до начала формального школьного образования, не является чем-то новым. На самом деле, обучение математике в раннем детстве (ОМРД) реализовывалось в различных формах на протяжении сотен лет[1]. Со временем изменились взгляды на то, почему ОМРД важно, какие задачи оно должно решать и как должно (и должно ли?) осуществляться обучение математике таких маленьких учеников.

Предмет и научный контекст

Необходимо ли ОМРД?

В последнее время у многих экспертов по раннему развитию, в том числе педагогов и исследователей, вызывает беспокойство тенденция к «сдвигу обучения вниз»[2], что означает, что учебные программы и системы оценки, которые были изначально разработаны для детей школьного возраста, сейчас начинают применяться к детям дошкольного возраста[3]. Этот сдвиг обусловлен главным образом идеологическими причинами, акцентирующими внимание на раннем успехе, улучшении результатов тестов и устранении отставания некоторых меньшинств и социально-экономических групп[4].

Несмотря на обеспокоенность, вызванную сдвигом учебных программ для школьников в сторону более раннего возраста в целом, существуют убедительные доводы в пользу внедрения, по меньшей мере, некоторых типов математического обучения, для дошкольников, или для некоторых групп дошкольников. Как отмечают Ginsburg et al., изучение математики «является «естественной» и соответствующей уровню развития детей младшего возраста деятельностью»[1], и через ежедневное взаимодействие с миром у многих детей развиваются неформальные представления о пространстве, количестве, размерах, упорядоченностях и операциях. К сожалению, не все дети обладают одинаковыми

возможностями для формирования этих неформальных, но основополагающих математических понятий в своей повседневной жизни. Следовательно, поскольку равные возможности для получения математического образования являются ключевым фактором, раннее математическое обучение особенно важно для детей из маргинализованных групп[3], таких как дети с особыми потребностями, дети, для которых английский является вторым языком, дети из неблагополучных семей и семей с низким социально-экономическим статусом[4].

Результаты последних исследований

Равенство в получении образования является одним из основных аргументов в пользу ОМРД, но с этим тесно связана проблема помощи маленьким детям в переходе от неформальных понятий к формальным математическим понятиям, которые обладают названиями, принципами и правилами. Формирование математических понятий у детей часто опирается на неформальный опыт, и его можно представить в виде траекторий научения[5], которые показывают, как конкретные математические навыки могут опираться на предшествующий опыт и влиять на последующие этапы процесса обучения. Например, освоение названий, порядка и количественной составляющей "интуитивных чисел" 1-3 и их распознавание в форме групп объектов, числительных и частей целого (например, три складывается из 2 и 1 или 1 + 1 + 1) может помочь детям в развитии понимания простых операций[6]. «Математизация», или предоставление соответствующего математического опыта и обогащение этого опыта с помощью математической лексики, поможет связать естественную любознательность и наблюдения детей о математике со школьными понятиями3. Исследователи обнаружили свидетельства того, что очень ранние математические рассуждения[1,6,7] и ОМРД могут помочь детям сформировать понятия, найти связи между соотносящимися понятиями, расширить словарный запас и систему символов, необходимых для математической коммуникации и передачи знаний (для примера, см. Baroody[6]).

Важность ОМРД обусловлена не только необходимостью «математизации» и равной доступности этого обучения. При анализе шести лонгитюдных исследований, Duncan et al.[8] обнаружили, что математические навыки детей при поступлении в школу позволяют предсказывать последующую успеваемость точнее, чем навыки внимания, чтения и социо-эмоциональные навыки. Аналогичным образом, трудности в усвоении основных математических понятий могут иметь далекоидущие последствия для ребенка в период

всего школьного обучения. Учитывая, что математические навыки крайне важны для продуктивной деятельности в современном мире (Platas L, неопубликованные данные, 2006) [9] и что некоторые области математики, например, алгебра, могут служить своего рода фильтром на пути к высшему образованию и выбору карьеры[10], адекватное раннее математическое обучение всех детей дошкольного возраста приобретает огромное значение.

Что является «адекватным» ОМРД?

Взгляды на то, что должно включать ОМРД и как оно должно внедряться в жизнь дошкольников, различаются и представляют собой континуум позиций относительно масштабов вмешательства и объема предлагаемых занятий. На одном конце континуума находится очень прямолинейный, дидактический подход к ОМРД, центром которого становится педагог, а на другом конце – основанный на игре, ориентированный на ребенка, не-дидактический подход к раннему математическому ОМРД[4]. Отдельные дети, и даже, возможно, разные группы детей, могут извлечь пользу из различных моделей обучения, интегрированных в образовательный континуум, и предстоит провести еще немало исследований, чтобы определить наиболее оптимальные для всех детей и всех аспектов математики модели преподавания. Одним из примеров научно обоснованной учебной программы по математике является Building Blocks, программа, разработанная для поддержки и совершенствования математического мышления (то есть, траекторий научения) с помощью компьютерных игр, повседневных предметов (с которыми можно манипулировать, например, кубики) и печатной продукции[11]. Building Blocks представляет собой попытку соединить содержание и форму обучающих занятий с траекториями научения хорошо исследованных навыков, таких, как счет. Траектории научения для других сфер, например,измерение и упорядочение, не так хорошо изучены[5].

Ginsburg et al.[1] описали шесть компонентов, которые должны присутствовать во всех формах ОМРД (например, как в программе Building Blocks): среда, игра, обучающие моменты, проекты, учебный план и целенаправленное обучение. К примеру, независимо от того, где конкретная учебная программа по математике накладывается на игровой и дидактический континуум, среда является жизненно важным компонентом раннего обучения. В частности, обеспечение детей дошкольного возраста материалами, которые стимулируют математическое мышление, таких как кубики, геометрические фигуры и паззлы, может способствовать развитию фундаментальных навыков, таких как

упорядочивание, проведение сравнений и ранняя числовая грамотность. Еще одним важным компонентом является обучающий момент, т.е. выявление и использование спонтанных математических открытий ребенка с помощью вопросов, которые требуют от детей размышления и ответа; представление математической лексики и специальных обозначений; предъявление примеров, позволяющих закреплять и углублять понимание математики.

Возможно, в современной литературе самым популярным компонентом ОМРД является игра. Многие сторонники игрового обучения, или обучения через игру, утверждают, что дети лучше усваивают информацию, когда они самостоятельно обнаруживают математические понятия в естественных или минимально подстроенных ситуациях[12,13]. Некоторые исследователи утверждают, что в настоящее время игра вытесняется из дошкольных учреждений под давлением более интенсивной программы обучения и тестирования[14], и предоставляют данные, свидетельствующие о том, что дети в начальных классах (в том числе детских садах) теперь тратят гораздо больше времени на подготовку к тестам, чем на игровые занятия[4]. Даже реклама множества развивающих игрушек, которые появляются на рынке, акцентирует внимание больше на раннем освоении академических понятий (например, грамотности для малышей), чем на игровом обучении как таковом. Подобная ситуация частично вызвана представлениями родителей о важности образования в раннем возрасте для последующей академической успеваемости. Тем не менее, предстоит провести еще немало исследований влияния развивающих игрушек, технологий, игр (или отсутствия таковых), а также различных учебных программ ОМРД на математическое развитие дошкольников.

Неисследованные области и рекомендации

Каковы препятствия на пути к эффективному раннему обучению?

Обучение дошкольников математике осложняется несколькими факторами, к числу которых относятся социальное давление (т.е. показатели успеваемости, финансирование, различные стандарты учебных программ), индивидуальные особенности дошкольников (т.е. дети по-разному извлекают пользу из разнообразных способов обучения математике), идеологические различия в отношении обучения (т.е., континуум форм обучения от игровой до дидактическая) и пробелы в исследованиях развития (т.е. неустановленные траектории научения для некоторых математических понятиий). Также ОМРД осложняют

проблемы, связанные с реализацией математического обучения (независимо от учебной программы), такие как собственные страхи учителей или их затруднения в математике. К сожалению немного дошкольных педагогов прошли обучение, знакомящее со спецификой преподавания математики именно маленьким детям (Platas L, неопубликованные данные, 2006). Учителям нужны сведения о том, что знают дети, как дети учат новые понятия, и какие стратегии обучения являются наиболее эффективными, а также должны знать эти математические понятия сами (Platas L, неопубликованные данные, 2006)[3]. Расширение возможностей, позволяющих дошкольным педагогам получать специализированное образование, может способствовать улучшению качества (и количества) обучения детей дошкольного возраста математике.

Выводы

Необходимость знакомства с математическими понятиями и получение математического опыта в раннем возрасте не являются предметом обсуждения в сфере ОМРД; все разделяют мнение о том, что это важно. Вопрос, скорее, в том, как, когда, зачем и для кого должно вводиться ОМРД в его конкретных формах. Мнения различаются относительно соотношения структурированной и игровой форм деятельности при раннем обучении, а также о доле обучающих моментов в структуре конкретных учебных программ. По мере накопления достоверных сведений относительно развития математических понятий у маленьких детей (так называемых траекторий научения), попытки синхронизировать когнитивное развитие с оптимальными методами преподавания (или с лучшими условиями среды, поддерживающими естественные математические открытия) могут помочь проложить путь для получения адекватного и равнодоступного математического опыта для всех детей дошкольного возраста.

Литература

1. Ginsburg HP, Lee JS, Boyd JS. Mathematics education for young children: What it is and how to promote it. *Social Policy Report* 2008;223-23.
2. Elkind D. Foreword. In: Miller E, Almon J, eds. *Crisis in the kindergarten: Why children need to play in schoo*l. College Park, MD: Alliance for Childhood; 2009: 9.
3. Clements DH. Major themes and recommendations. In: Clements DH, Sarama J, DiBiase A, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2004: 7-72.
4. Miller E, Almon J, eds. *Crisis in the kindergarten: Why children need to play in school*. College Park, MD: Alliance for Childhood; 2009:1-72.
5. Clements DH, Sarama J. Learning trajectories in early mathematics – sequences of acquisition and teaching. *Encyclopedia of Language and Literacy Development*. London, ON: Canadian Language and Literacy Research Network; 2009: 1-7.

6. Baroody AJ. Fostering early numeracy in preschool and kindergarten. *Encyclopedia of Language and Literacy Development*. London, ON: Canadian Language and Literacy Research Network; 2009: 1-9.

7. Sophian C. Numerical knowledge in early childhood. In: Tremblay RE, Barr RG, Peters RDeV, Boivin M, eds. *Encyclopedia on Early Childhood Development* [online]. Montreal, Quebec: Centre of Excellence for Early Childhood Development; 2009:1-7.

8. Duncan GJ, Dowsett CJ, Claessens A, Magnuson K, Huston AC, Klebanov P, Pagani LS, Feinstein L, Engel M, Brooks-Gunn J, Sexton H, Duckworth K, Japel C. School readiness and later achievement. *Developmental Psychology* 2007;43:1428-1446.

9. Baroody AJ, Lai M, Mix KS. The development of young children's early number and operation sense and its implications for early childhood education. In: Spodek B, Olivia S, eds. *Handbook of research on the education of young children*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc; 2006:187-221.

10. Knuth EJ, Alibali MW, McNeil NM, Weinberg A, Stephens AC. Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equality and variable. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 2005;37:1-9.12.

11. Sarama J. Technology in early childhood mathematics: Building Blocks as an innovative technology-based curriculum. In: Clements DH, Saram J, DiBiase A, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2004: 361-375.

12. Polonsky L, Freedman D, Lesher S, Morrison K. *Math for the very young: A handbook of activities for parents and teachers*. New York, NY: John Wiley & Sons; 1995.

13. Seo K, Ginsburg HP. What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? Lesson from new research. In: Clements DH, Saram J, DiBiase A, eds. *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education*. Mahwah, NJ: Erlbaum; 2004: 91-104.

14. Hirsh-Pasek K, Golinkoff RM, Berk LE, Singer DG. *A mandate for playful learning in preschool: Presenting the Evidence*. Oxford, UK: University Press; 2009